ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
112

For Senior & Graduate Courses

重力とエントロピー

重力の熱力学的性質を理解するために

◆

福間 将文・酒谷 雄峰　共著



サイエンス社

SGC ライブラリ-112

重力とエントロピー

重力の熱力学的性質を理解するために

福間 将文・酒谷 雄峰　共著

サイエンス社

SGC ライブラリ (The Library for Senior & Graduate Courses)

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），

脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1〜59 省略（品切含）

- **60 計算神経科学への招待**　銅谷賢治著　本体 1429 円
- **61 演習くり込み群**　柏太郎著　本体 1886 円
- **62 熱方程式で学ぶ逆問題**　山本昌宏・金成煥 共著　本体 1429 円
- **63 重力理論講義**　前田恵一著　本体 1886 円
- **65 ネットワーク科学への招待**　青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円
- **66 物理のためのリー群とリー代数**　窪田高弘著　本体 1886 円
- **67 量子暗号理論の展開**　小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円
- **68 量子力学の考え方**　根本香絵著　本体 1829 円
- **69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］**　細谷暁夫著　本体 1876 円
- **71 ε-δ 論法再入門**　中神祥臣著　本体 1857 円
- **72 超関数・フーリエ変換入門**　磯崎洋著　本体 1857 円
- **73 問題例で深める物理**　香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円
- **74 非線形現象と微分方程式**　小川知之著　本体 1781 円
- **75 数物系のための圏論**　梶浦宏成著　本体 2143 円
- **76 超弦理論を学ぶための場の量子論**　鈴木久男著　本体 2095 円
- **77 重点解説 ジョルダン標準形**　西山享著　本体 1905 円
- **78 重点解説 ベクトル・テンソル**　森川雅博著　本体 2095 円
- **79 行列解析の基礎**　山本哲朗著　本体 2190 円
- **80 超弦理論の基礎**　今村洋介著　本体 2429 円
- **81 繰りこみ群の物理と数理**　伊東恵一著　本体 2190 円
- **82 超重力理論**　谷井義彰著　本体 2381 円
- **83 共形場理論**　伊藤克司著　本体 2238 円
- **84 演習形式で学ぶ相転移・臨界現象**　宮下精二・轟木義一 共著　本体 2476 円
- **85 実例で学ぶ精度保証付き数値計算**　中尾充宏・渡部善隆 共著　本体 2362 円
- **86 リーマン予想の数理物理**　黒川信重・小山信也 共著　本体 2190 円
- **87 量子多体系の物理**　藤本聡・川上則雄 共著　本体 2190 円
- **88 演習形式で学ぶリー群・リー環**　示野信一著　本体 2381 円
- **89 弦理論の代数的基礎**　髙橋篤史著　本体 2476 円
- **90 アインシュタイン方程式**　白水徹也著　本体 2238 円
- **91 CP 対称性の破れ**　林青司著　本体 2476 円
- **92 弦の場の理論**　石橋延幸・村上公一 共著　本体 2429 円
- **93 超弦理論の応用**　夏梅誠著　本体 2495 円
- **94 複素多様体論講義**　辻元著　本体 2362 円
- **95 幾何学の量子化**　前田吉昭・佐古彰史 共著　本体 2429 円
- **96 量子力学から超対称性へ**　坂本眞人著　本体 2476 円
- **97 行列解析ノート**　山本哲朗著　本体 2000 円
- **98 無限量子系の物理と数理**　小嶋泉・岡村和弥 共著　本体 2381 円
- **99 現代宇宙論講義**　辻川信二著　本体 2476 円
- **100 クォーク・ハドロン物理学入門**　国広悌二著　本体 2238 円
- **101 統計力学から理解する超伝導理論**　北孝文著　本体 2457 円
- **102 量子力学ノート**　佐藤文隆著　本体 2238 円
- **103 量子情報と時空の物理**　堀田昌寛著　本体 2457 円
- **104 弦理論と行列模型**　土屋麻人著　本体 2238 円
- **105 ディラック方程式**　日笠健一著　本体 2295 円
- **106 ホログラフィー原理と量子エンタングルメント**　髙柳匡著　本体 2407 円
- **107 パーコレーション理論講義**　樋口保成著　本体 2194 円
- **108 格子模型の数理物理**　南和彦著　本体 2222 円
- **109 数物系のためのミラー対称性入門**　秦泉寺雅夫著　本体 2500 円
- **110 情報幾何学の新展開**　甘利俊一著　本体 2593 円
- **111 作用素環と無限量子系**　松井卓著　本体 2083 円
- **112 重力とエントロピー**　福間将文・酒谷雄峰 共著　本体 2546 円

まえがき

自然界には 4 つの相互作用があるが，重力以外の電磁相互作用・弱い相互作用・強い相互作用の 3 つは，ゲージ対称性を持つ局所場理論として量子力学的な記述が可能になっており，素粒子の標準模型として確立している．一方，重力は，エネルギーを持つものに普遍的に働く力でありながら，いまだに量子力学的な記述ができていない．こうした「**量子重力理論**」がいまだに完成していない理由は，量子重力の真に基本的な力学変数がまだ同定されていないからだと思われる．

実際，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を力学変数とした局所場理論としての量子化は，くりこみ不可能なため上手くいかない．また，閉弦を基本変数とした超弦理論によるアプローチも，摂動論を超えた定式化をしようとするといつも袋小路に陥ってしまう．

そこで，重力固有の性質をもう一度見直そうという機運が高まっているが，その際に一番注目されているのは，重力が持つ熱的性質である．実際，一般相対性理論は何らかの基礎理論の低エネルギー有効理論であるはずなのに，通常の場の理論の有効場と違い，重力場はそれ自身が熱的性質を持つ統計力学的アンサンブルに対応している．例えば，一般相対性理論の古典解である定常ブラックホール解は，それ自身が平衡熱力学における熱浴の役割を担う．

本書の目的は，量子重力理論の次の進展の準備とすべく，重力の熱力学的性質を基礎から解説することである．当該分野を解説したものにはすでに多くの良書があるが，本書の特徴は，熱力学において一番重要な概念である**エントロピー**を前面に出すことにより，論理ができるだけ一貫したものとなるようにしたことである．

対象とする読者としては，大学院の修士課程に進んだばかりの学生を想定している．必要となる予備知識としては，標準的な学部レベルの物理学以外には，初歩的な一般相対性理論ぐらいである．それについても，必要事項は第 1 章でまとめておいたので，学部生でもその気になれば十分読みこなせるものと思う．

本書の内容は以下のとおりである．

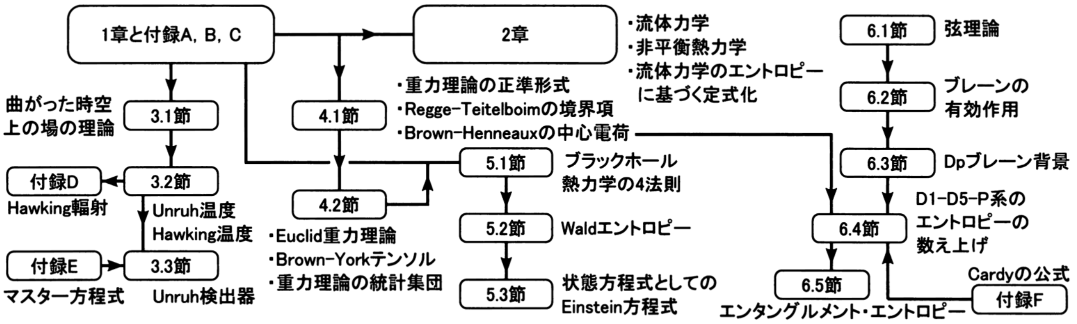
- ▶第 1 章では，一般相対性理論の簡単な復習を行い，本書で扱う題材に対して十分な準備を与える．技術的に多少高度な内容も扱っているため，必要に応じて文献 [1]～[5] などを参照されたい．
- ▶第 2 章では，専らエントロピーに基づいて非平衡熱力学を構成する方法について説明する．また，その応用例として，流体力学などの連続体力学をエントロピーに基づいて定式化する著者たちの研究も解説する．
- ▶第 3 章では，時空が熱的性質を持つことを，場の量子論の手法を用いて説明する．3.1 節で曲がった時空上の場の量子論の導入を行った後，3.2 節では，「Minkowski 時空における真空状態の中で等加速度運動を行う観測者は，ある有限温度の熱浴にいるかのように感じる」という Unruh 効果を説明する．また，これを用いて Hawking 温度の計算を行う．3.3 節では，Unruh

効果が実際にどのように観測されるかについて，仮想的な検出器を用いた思考実験を紹介する．

▶第 4 章では，重力理論の正準形式や，Euclid 重力理論の立場から時空の熱力学を議論する．4.1 節では重力の正準形式について解説し，質量や電荷といった保存量を定義する．4.2 節では，時空を Euclid 化したときの重力理論を考え，エントロピーの計算方法を説明する．

▶第 5 章では，第 3 章，第 4 章で得られた時空の熱的性質に関する様々な手がかりを用いて，時空と熱力学の間の対応を，より統一的な視点から議論する．5.1 節では，古典重力理論のいくつかのアプローチからブラックホール熱力学の 4 法則を導く．5.2 節では，Bekenstein–Hawking エントロピーの計算方法の一つである「Wald の方法」を解説する．また，5.3 節では，重力理論が熱的であるという要請から一般相対性理論を導出する試みについて解説する．

▶第 6 章では，量子重力理論の有力候補である超弦理論から，一部のブラックホールのエントロピーが正しく再現できていることを説明する．6.1 節から 6.3 節で超弦理論に関する必要事項を準備した後，6.4 節でブラックホールのエントロピーを統計力学的に計算し，Bekenstein–Hawking エントロピーが正しく再現されることを解説する．最後の 6.5 節で AdS/CFT 対応に関する話題を簡単に紹介する．



各章の間の関係を上の図に示した．基本的には第 1 章から順に読み進めることをお勧めするが，図の中に各節で扱っているキーワードを書いておいたので，取り急ぎ特定の項目のみについて知りたい読者は各自で最短経路を見つけて読まれたい．

本書を書く機会を与えてくださり，辛抱強く本書の執筆を激励してくださったサイエンス社「数理科学」編集部の平勢耕介氏には心から感謝したい．本書のいくつかの内容は京都大学大学院生の杉下宗太郎氏との共同研究に基づいている．ここに記して感謝したい．また，杉下氏と，同じく京大大学院生の村瀬健太氏には，原稿のほとんどを読んでもらい，大変貴重な意見をいただいた．深く感謝の意を表したい．最後に，応援してくれた両親と家族に感謝する．

2014 年 7 月

福間 将文・酒谷 雄峰

目　次

第 1 章

一般相対性理論の基礎事項

この章では，第 2 章以降で必要になる一般相対性理論の基礎的事項を簡単にまとめる．本章で足りない部分は [1]〜[5] などの教科書で補っていただきたい．なお，ブラックホールについては [1], [2], [6]〜[8] が詳しい．

1.1 Riemann 幾何学と Einstein 方程式

1.1.1 Riemann 幾何学

$\mathcal{M}$ を d 次元**多様体**とする．つまり，各点 $P \in \mathcal{M}$ のまわりには局所座標系 $x = (x^\mu)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, d-1)$ があり（以下 x–系という），座標値と点の間には 1 対 1 対応がある（図 1.1）．なお，異なる局所座標系（x–系と x'–系）が重なっている領域では，座標値 x と x' の間に 1 対 1 の関数関係

$$x'^\mu = x'^\mu(x) \tag{1.1}$$

があるが，それは常に滑らかな関数であるとする．以下，点 P が座標値 x の点であることを強調したいときには，点 P を $P(x)$ と書くことにする．

d 次元多様体 $\mathcal{M}$ が Lorentz 符号の **Riemann 計量** $g_{\mu\nu}(x)$ を持つとき，

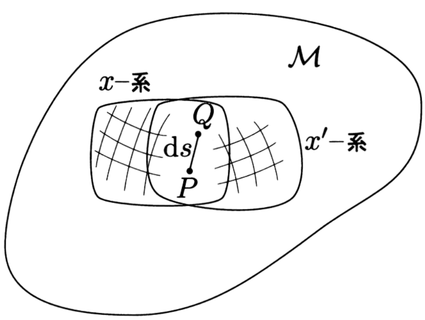


図 1.1　多様体 $\mathcal{M}$ と，2 つの局所座標系 x–系と x'–系．

$(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ を d 次元 **Lorentz 多様体**という．このとき，同じ局所座標系に属する近接した 2 点 $P(x)$ と $Q(x+\mathrm{d}x)$ に対し，その間の微小距離 $\mathrm{d}s$ が

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{1.2}$$

と定義される．ここで，$d\times d$ 行列 $\big(g_{\mu\nu}(x)\big)$ は非退化な実対称行列で，負の固有値を 1 つだけ持つ．また，逆行列を $\big(g^{\mu\nu}(x)\big)$ と書く．$g_{\mu\nu}(x)$ は，異なる座標系の間で

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\,g_{\rho\sigma}(x) \tag{1.3}$$

と変換し，そのため，$\mathrm{d}s^2$ は座標系のとり方によらない定義になっている：

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = g'_{\mu\nu}(x')\,\mathrm{d}x'^\mu \mathrm{d}x'^\nu\,. \tag{1.4}$$

x と $x+\mathrm{d}x$ で囲まれる直方体の微小体積 $\mathrm{d}V$ を

$$\mathrm{d}V \equiv \sqrt{-g(x)}\,\mathrm{d}^d x \quad \big[\,g(x) \equiv \det\big(g_{\mu\nu}(x)\big)\,\big] \tag{1.5}$$

で定義すると，これは局所座標系のとり方によらず，**不変体積要素**と呼ばれる．

1.1.2 テンソル場

点 P における接空間 $T_P\mathcal{M}$ は，点 P における 1 階微分全体が作る線形空間として定義される（図 1.2）：

$$T_P\mathcal{M} \equiv \big\{ v_P = v_P^\mu\,\partial_\mu|_P \;\big|\; (v_P^\mu) \in \mathbb{R}^d \big\}\,. \tag{1.6}$$

ここで，$\partial_\mu|_P = (\partial/\partial x^\mu)|_P$ $(\mu = 0, 1, \ldots, d-1)$ は x–系での基底ベクトルである．異なる座標系の間で基底ベクトルは Leibniz 則のもとで変換し，x–系の基底ベクトル $\partial_\mu|_P = (\partial/\partial x^\mu)|_P$ と x'–系の基底ベクトル $\partial'_\mu|_P = (\partial/\partial x'^\mu)|_P$ は

$$\partial_\mu|_P = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\Big|_P\,\partial'_\nu|_P \tag{1.7}$$

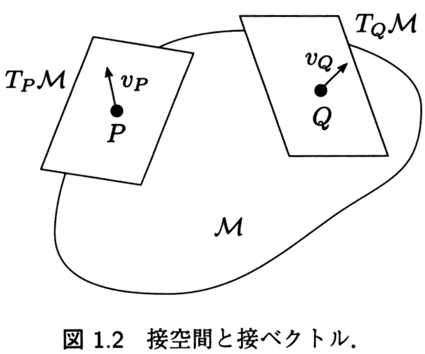


図 1.2　接空間と接ベクトル．

で関係する．同じベクトル v_P の x–系での展開係数 v_P^μ と x'–系での展開係数 $v_P'^\mu$ は，関係式

$$v_P = v_P^\mu\,\partial_\mu|_P = v_P'^\mu\,\partial'_\mu|_P \tag{1.8}$$

より，次のように関係する：

$$v_P'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\bigg|_P v_P^\nu\,. \tag{1.9}$$

点 $P = P(x)$ における接空間 $T_P\mathcal{M}$ には，Riemann 計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を用いて内積を入れることができる：

$$u_P,\,v_P \in T_P\mathcal{M} \;\;\Rightarrow\;\; \langle u_P,\,v_P\rangle_P \equiv g_{\mu\nu}(x)\,u_P^\mu\,v_P^\nu\,. \tag{1.10}$$

これは座標系のとり方によらない．また，v_P の 2 乗ノルムを $v_P^2 \equiv \langle v_P,\,v_P\rangle_P$ と書く．$v_P^2 > 0$ のとき v_P を**空間的** (spacelike) という．また，$v_P^2 < 0$ のとき**時間的** (timelike)，$v_P^2 = 0$ のとき**ヌル** (null) という．

各点で定義された接ベクトルの集合 $v \equiv \{v_P \mid P \in \mathcal{M}\}$ は $\mathcal{M}$ 上でベクトル場を定義する．これを**接ベクトル場**と呼ぶ．とくに成分を指定したい場合は

$$v = v^\mu(x)\,\partial_\mu \tag{1.11}$$

と書くことにする．以下，係数の $v^\mu(x)$ は x の関数として滑らかであるとする．なお，各点 P の接空間 $T_P\mathcal{M}$ におけるヌルベクトルの全体は，先端同士でつながった 2 つの光円錐 (lightcone) を形作り，時間的ベクトルはその内側に属する（図 1.3）．どちらの光円錐の内部にあるかで，時間的ベクトルは**未来方向** (future directed) か**過去方向** (past directed) の 2 種類に分けられる．以下，各点における未来方向と過去方向の区別が，$\mathcal{M}$ 全体で滑らかにかつ矛盾なく定義できていると仮定する．これは，$\mathcal{M}$ 上の至る所で時間的な（従ってゼロでない）ベクトル場 $\mathsf{f} = \mathsf{f}^\mu\,\partial_\mu$ が存在することと同値である［つまり $\exists\mathsf{f}$ s.t. $\mathsf{f}_P^2 < 0$ $(\forall P \in \mathcal{M})$］．このとき，時間的ベクトル $v_P \in T_P\mathcal{M}$ が未来方向にあることは，v_P が f_P と同じ側の光円錐に属していること，つまり不等式 $g_{\mu\nu}(x)\,v_P^\mu\,\mathsf{f}_P^\nu < 0$

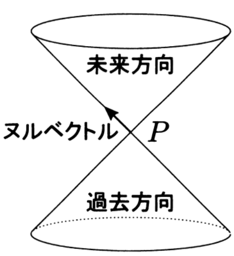


図 1.3　光円錐．

で完全に特徴づけられる．

余接空間 $T^*_P\mathcal{M}$ は $T_P\mathcal{M}$ の双対線形空間として定義される*1)．x–系の基底 $\partial_\mu|_P \in T_P\mathcal{M}$ の双対基底を $\mathrm{d}x^\mu|_P \in T^*_P\mathcal{M}$ と書けば，これは，

$$\mathrm{d}x'^\mu|_P = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\bigg|_P \mathrm{d}x^\nu|_P \tag{1.12}$$

と変換する．このとき，$T^*_P\mathcal{M}$ の元は x–系や x'–系で

$$\omega_P = \omega_{P,\,\mu}\,\mathrm{d}x^\mu|_P = \omega'_{P,\,\mu}\,\mathrm{d}x'^\mu|_P \tag{1.13}$$

の形に書け，係数は 2 つの座標系の間で次のように変換する:

$$\omega'_{P,\,\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\bigg|_P \omega_{P,\,\nu}\,. \tag{1.14}$$

余接ベクトルの集合 $\omega = \{\omega_P \mid P \in \mathcal{M}\}$ を**余接ベクトル場**と呼び,

$$\omega = \omega_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu \tag{1.15}$$

と書く．Riemann 計量 $g_{\mu\nu}$ とその逆 $g^{\mu\nu}$ を用いることで，接ベクトル場と余接ベクトル場は互いに自由に行き来できる：$v_\mu \equiv g_{\mu\nu}\,v^\nu\,,\ \omega^\mu \equiv g^{\mu\nu}\,\omega_\nu\,.$

一般に，点 $P \in \mathcal{M}$ における (p,q) テンソル空間 $T^{(p,q)}_P\mathcal{M}$ を次で定義する：

$$T^{(p,q)}_P\mathcal{M} \equiv \underbrace{T_P\mathcal{M}\otimes\cdots\otimes T_P\mathcal{M}}_{p\ \text{個}} \otimes \underbrace{T^*_P\mathcal{M}\otimes\cdots\otimes T^*_P\mathcal{M}}_{q\ \text{個}}\,. \tag{1.16}$$

また，各点で $T^{(p,q)}_P\mathcal{M}$ に値を持つテンソルの集合を (p,q) **テンソル場**と呼び,

$$T = T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}(x)\,\partial_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\partial_{\mu_p}\otimes\mathrm{d}x^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\nu_q} \tag{1.17}$$

と書く．係数は，x–系と x'–系の間で

$$\begin{aligned}&T'^{\,\mu_1\cdots\mu_p}_{\ \nu_1\cdots\nu_q}(x')\\ &= \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\bigg|_P\cdots\frac{\partial x'^{\mu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\bigg|_P\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\bigg|_P\cdots\frac{\partial x^{\sigma_q}}{\partial x'^{\nu_q}}\bigg|_P T^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}(x)\end{aligned} \tag{1.18}$$

と変換する．今後は，誤解が生じない限り，多様体の点 P と座標値 x を区別せず書くことにする．

---

*1) d 次元線形空間 V 上の実数値線形関数の全体 V^* を V の**双対線形空間**と呼ぶ．このとき，$\omega \in V^*$ と $v \in V$ の間には自然な双線形のペアリング $\langle\omega,\,v\rangle \equiv \omega(v) \in \mathbb{R}$ が存在する．V の基底 $\{e_\mu\}$ に対し，d 個のベクトル $f^\mu \in V^*$ が $\langle f^\mu,\,e_\nu\rangle = \delta^\mu_\nu$ を満たすとき，$\{f^\mu\}$ を $\{e_\mu\}$ の**双対基底**と呼ぶ．このとき，$\omega = \omega_\mu\,f^\mu \in V^*\,,\ v = v^\mu\,e_\mu \in V$ に対して，$\langle\omega\,,v\rangle = \omega_\mu\,v^\mu$ である．

1.1.3 微分形式

$(0,p)$ テンソル場 ω の係数が完全反対称*2)：

$$\omega_{\mu_1\cdots\mu_p} = \omega_{[\mu_1\cdots\mu_p]} \tag{1.19}$$

であるとき，

$$\omega = \frac{1}{p!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p} \tag{1.20}$$

と書ける．ここで

$$\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p} \equiv p!\;\mathrm{d}x^{[\mu_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{\mu_p]} \tag{1.21}$$

である．この ω を p 次の共変な**微分形式**，略して共変 p-形式という．とくに ω の次数が p であることを明示したいときは，ω_p などと書く．以下では，必ずしも係数 $\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}$ が共変に変換しない微分形式も取り扱う．

p-形式 $\omega_p = (1/p!)\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}$ と q-形式 $\eta_q = (1/q!)\,\eta_{\nu_1\cdots\nu_q}\,\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_q}$ に対して，その**外積**を

$$\begin{aligned}
\omega_p\wedge\eta_q &\equiv \frac{1}{p!\,q!}\,\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\eta_{\nu_1\cdots\nu_q}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}\wedge\mathrm{d}x^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\nu_q}\\
&= \frac{1}{p!\,q!}\,\omega_{[\mu_1\cdots\mu_p}\,\eta_{\mu_{p+1}\cdots\mu_{p+q}]}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+q}}\\
&\equiv \frac{1}{(p+q)!}\,(\omega_p\wedge\eta_q)_{\mu_1\cdots\mu_{p+q}}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+q}}
\end{aligned} \tag{1.22}$$

で定義する．これはもちろん $(p+q)$-形式である．なお，ω_p と η_q の係数が（行列などではないただのスカラー量で）交換する場合には，

$$\omega_p\wedge\eta_q = (-1)^{pq}\,\eta_q\wedge\omega_p \tag{1.23}$$

が成立する．

p-形式から $(p+1)$-形式を作る次の線形作用素を**外微分**と呼ぶ：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\,\omega_p &\equiv \mathrm{d}x^{\mu}\wedge\partial_\mu\,\omega_p \equiv \frac{1}{p!}\,\partial_\mu\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_p}\\
&= \frac{1}{p!}\,\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\cdots\mu_{p+1}]}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\mathrm{d}x^{\mu_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}\\
&\equiv \frac{1}{(p+1)!}\,(\mathrm{d}\omega_p)_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}\,.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

容易に確かめられるように，任意の ω_p に対して

$$\mathrm{d}^2\,\omega_p = 0 \tag{1.25}$$

が成立する．

---

*2) 反対称化の記号 [ ] の定義については付録の A.1 節を見よ．

$\mathrm{d}\,\omega_p = 0$ となる共変な微分形式 ω_p を閉形式 (closed form) と呼ぶ．閉形式 ω_p は，少なくとも局所的には $\mathrm{d}\,\eta_{p-1}$ の形に必ず書くことができる（Poincaré の補題）．とくに η_{p-1} が大域的に定義された共変 $(p-1)$-形式であるとき，ω_p を完全形式 (exact form) と呼ぶ．

1.1.4　ひき戻しと Lie 微分

異なる 2 点 P, Q における 2 つの接空間 $T_P\mathcal{M}$ と $T_Q\mathcal{M}$ はベクトル空間として異なるものであるから，$v_Q \in T_Q\mathcal{M}$ と $v_P \in T_P\mathcal{M}$ を直接比較することはできない（図 1.2）．これを可能にするためには，$T_Q\mathcal{M}$ のベクトルを $T_P\mathcal{M}$ に "移動" させる必要がある．この操作の代表的なものが，本小節で解説する『ひき戻し』と次小節で解説する『平行移動』である．

今，f を $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$ への微分同相写像とする．このとき，$Q = f(P)$ で関係する 2 点 P と Q について，テンソル空間 $T_Q^{(p,q)}\mathcal{M}$ からテンソル空間 $T_P^{(p,q)}\mathcal{M}$ への線形写像 f^* が基底に対する次の変換で定義できる：

$$f^*\left(\left.\frac{\partial}{\partial y^\rho}\right|_Q \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^\sigma|_Q \otimes \cdots\right) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho}\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_P \otimes \cdots \otimes \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu}\,\mathrm{d}x^\nu|_P \otimes \cdots . \tag{1.26}$$

ここで，$y^\mu = f^\mu(x)$ は，点 P の座標値が x であったときの点 $Q = f(P)$ の座標値である*3)．これは，係数に対して，次の変換を行うことと同じである：

$$(f^*T)^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}(x) \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\rho}\cdots\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\nu}\cdots \left.T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots}(y)\right|_{y=f(x)}. \tag{1.27}$$

各点 P に対する上の変換規則を $\mathcal{M}$ 全体に広げることにより，テンソル場 $T = T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}\,\partial_\mu \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^\nu \otimes \cdots$ の**ひき戻し** (pullback) f^*T が定義される．これが再びテンソル場になっていることは容易に確かめられる．また，$\mathrm{d}\,(f^*\omega) = f^*(\mathrm{d}\,\omega)$ が成立する．

とくに f が微小変換 $x^\mu \mapsto f^\mu(x) = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ のときは，f^*T と T の差は ϵ に比例し，

$$\begin{aligned}\pounds_\epsilon T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} &\equiv (f^*T)^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} - T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}\\ &= \epsilon^\lambda\,\partial_\lambda T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots} - \partial_\lambda\epsilon^\mu\,T^{\lambda\cdots}_{\nu\cdots} - \cdots + \partial_\nu\epsilon^\lambda\,T^{\mu\cdots}_{\lambda\cdots} + \cdots\end{aligned} \tag{1.28}$$

となる．この $\pounds_\epsilon T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ を，ベクトル場 $\epsilon = \epsilon^\mu\,\partial_\mu$ によるテンソル場 T の **Lie 微分**という*4)．容易に確かめられるように，2 つのベクトル場 $\epsilon_1 = \epsilon_1^\mu\,\partial_\mu$ と $\epsilon_2 = \epsilon_2^\mu\,\partial_\mu$ に対し，次が成立する：

---

*3)　P と Q のまわりの局所座標系をそれぞれ x–系，y–系とした．これらが同じ局所座標系である必要はないことに注意しよう．

*4)　x–系での微小変換 $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ と x'–系での微小変換 $x'^\mu \mapsto x'^\mu + \epsilon'^\mu(x')$ がどちらも同じ $\mathcal{M}$ 上の変換 $f:\ P \mapsto Q = f(P)$ を表すことから，等式 $\epsilon'^\mu(x') = (\partial x'^\mu/\partial x^\nu)|_P\,\epsilon^\nu(x)$ が成り立つ．従って，$\epsilon \equiv \epsilon^\mu\,\partial_\mu$ はベクトル場を定義する．

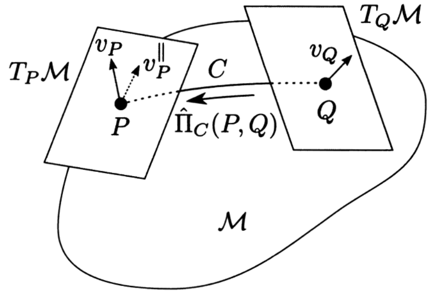


図 1.4　アフィン接続による平行移動 $\hat{\Pi}_C(P,Q)$.

$$\left[\mathcal{L}_{\epsilon_1},\, \mathcal{L}_{\epsilon_2}\right] = \mathcal{L}_{[\epsilon_1,\,\epsilon_2]}\,. \tag{1.29}$$

ここで，$[\epsilon_1,\epsilon_2] = [\epsilon_1,\epsilon_2]^\mu\,\partial_\mu$ は ϵ_1 と ϵ_2 の **Lie 括弧** (Lie bracket) である*5)：

$$[\epsilon_1,\,\epsilon_2]^\mu \equiv \epsilon_1^\nu\,\partial_\nu\epsilon_2^\mu - \epsilon_2^\nu\,\partial_\nu\epsilon_1^\mu = \epsilon_1^\nu\,\nabla_\nu\epsilon_2^\mu - \epsilon_2^\nu\,\nabla_\nu\epsilon_1^\mu\,. \tag{1.30}$$

1.1.5　平行移動と共変微分

C を点 $Q \in \mathcal{M}$ から点 $P \in \mathcal{M}$ への経路とするとき，C に沿った**平行移動**とは $T_Q\mathcal{M}$ から $T_P\mathcal{M}$ への線形変換である（図 1.4）．これは，微小区間の平行移動の積として，次のように定義される．

まず，経路 C を N 個の微小経路 C_i $(i = 1,\ldots,N)$ に一様に分ける．ここで，1 つの微小経路 C_i の端点 P_i と P_{i-1} は同じ局所座標系（x–系）にあり，それぞれの座標値が x と $x - \mathrm{d}x$ であるとする．このとき，$T_{P_{i-1}}\mathcal{M}$ から $T_{P_i}\mathcal{M}$ への平行移動を $\hat{\Pi}(P_i,P_{i-1})$ で定義し，その行列表示を次で定義する:

$$\hat{\Pi}(P_i,P_{i-1})\,\partial_\sigma\big|_{P_{i-1}} \equiv \left[\Pi(P_i,P_{i-1})\right]^\rho{}_\sigma\,\partial_\rho\big|_{P_i} \equiv \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{d}x^\mu\boldsymbol{\Gamma}_\mu(x)}\right)^\rho{}_\sigma\,\partial_\rho|_{P_i}$$
$$\left[\,\boldsymbol{\Gamma}_\mu(x) = \left(\Gamma^\rho_{\mu\sigma}(x)\right)\;:\; d\times d \text{ 行列}\right]. \tag{1.31}$$

この $d\times d$ 行列 $\boldsymbol{\Gamma}_\mu(x)$ を係数とする（共変でない）1-形式 $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_\mu(x)\,\mathrm{d}x^\mu$ を**アフィン接続**と呼ぶ．点 $Q = P_0$ から点 $P = P_N$ への平行移動は，この微小平行移動の積として定義される：

$$\hat{\Pi}_C(P,Q) \equiv \lim_{N\to\infty}\hat{\Pi}(P_N,P_{N-1})\,\hat{\Pi}(P_{N-1},P_{N-2})\cdots\hat{\Pi}(P_1,P_0)\,. \tag{1.32}$$

その行列表示 $\Pi_C(P,Q)$ は，P が x–系，Q が y–系の局所座標を持つとして，

$$\hat{\Pi}_C(P,Q)\,\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\bigg|_Q = \left[\Pi_C(P,Q)\right]^\rho{}_\sigma\,\frac{\partial}{\partial x^\rho}\bigg|_P \tag{1.33}$$

*5)　∇_ν は次節で定義する共変微分である．

で定義され，次のように書かれる*6)．

$$\Pi_C(P,Q) = \mathrm{P}\exp\Big(-\int_Q^P \mathrm{d}x^\mu\, \mathbf{\Gamma}_\mu(x)\Big)\,. \tag{1.34}$$

実際これは，微小な平行移動の表現行列 $\Pi(P_i, P_{i-1})$ の積として矛盾なく与えられる*7)．

平行移動の演算子 $\hat{\Pi}_C(P,Q)$ が与えられると，接ベクトル $v_Q \in T_Q\mathcal{M}$ の点 P への平行移動が

$$v_P^{\parallel} \equiv \hat{\Pi}_C(P,Q)\, v_Q \ \in T_P\mathcal{M} \tag{1.36}$$

と定義され，$v_P \in T_P\mathcal{M}$ と直接比較することが可能になる．この変換は，成分で書けば，

$$v_P^{\parallel\,\rho} \equiv \big[\Pi_C(P,Q)\big]^\rho{}_\sigma\, v_Q^\sigma = \Big[\mathrm{P}\exp\Big(-\int_Q^P \mathrm{d}x^\mu\, \mathbf{\Gamma}_\mu(x)\Big)\Big]^\rho{}_\sigma\, v_Q^\sigma \tag{1.37}$$

---

*6) $\mathrm{P}\exp$ は経路順序指数関数 (path-ordered exponential) と呼ばれる．Q から P への経路 C を関数 $\gamma:\ [0,1] \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{M}$ で表し，点 $\gamma(t)$ の座標を $X^\mu(t)$ と書いて $\mathbf{\Gamma}(t) \equiv \dot{X}^\mu(t)\,\mathbf{\Gamma}_\mu\big(X(t)\big)$ とすれば，(1.34) 式は次のようにも書ける：

$$\mathrm{P}\exp\Big(-\int_0^1 \mathrm{d}t\ \mathbf{\Gamma}(t)\Big) = \sum_{n\ge 0}(-1)^n \int_0^1 \mathrm{d}t_1 \int_0^{t_1}\mathrm{d}t_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n\, \mathbf{\Gamma}(t_1)\,\mathbf{\Gamma}(t_2)\cdots\mathbf{\Gamma}(t_n)\,.$$

*7) このことを示すには，行列の積 $\prod_i \Pi(P_i, P_{i-1})$ が途中の局所座標系のとり方によらないことを示せばよい．まず，$\mathbf{\Gamma}$ は，1 つの接空間ごとに値が決まるものでなく，2 つの接空間同士を結ぶものであるため，共変な 1-形式ではないことに注意しよう．実際，x'–系における行列表示 $\mathbf{\Gamma}'_\mu(x') \equiv \big(\Gamma'^\rho_{\mu\sigma}(x')\big)$ を (1.31) 式と同様に $\hat{\Pi}(P_i, P_{i-1})\,\partial'_\sigma|_{P_{i-1}} \equiv [\Pi'(P_i,P_{i-1})]^\rho{}_\sigma\,\partial'_\rho\big|_{P_i}$ と定義すれば，

$$(\text{左辺}) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\,\hat{\Pi}(P_i,P_{i-1})\Big|_{P_{i-1}}\partial_\beta|_{P_{i-1}} = [\Pi(P_i,P_{i-1})]^\alpha{}_\beta\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\Big|_{P_{i-1}}\partial_\alpha|_{P_i}\,,$$

$$(\text{右辺}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\Big|_{P_i}\,[\Pi'(P_i,P_{i-1})]^\rho{}_\sigma\,\partial_\alpha|_{P_i}$$

より，次の変換規則が得られる：

$$[\Pi'(P_i,P_{i-1})]^\rho{}_\sigma = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha}\Big|_{P_i}\,[\Pi(P_i,P_{i-1})]^\alpha{}_\beta\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\Big|_{P_{i-1}}\,. \tag{1.35}$$

ここで，左側の端点 P_i と右側の端点 P_{i-1} でそれぞれの変換行列が独立にかかっていることがポイントである．なお，この式に $\partial x'^\rho/\partial x^\alpha|_{P_i} = (\partial x'^\rho/\partial x^\alpha)(x)$，$\partial x^\beta/\partial x'^\sigma|_{P_{i-1}} = (\partial x^\beta/\partial x'^\sigma)(x'-\mathrm{d}x')$ を代入すれば，次が得られる：

$$\Gamma'^\rho_{\mu\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\,\Gamma^\alpha_{\lambda\beta} + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu \partial x'^\sigma}\,.$$

これにより，微小平行移動の行列の積 $\Pi(P_{i+1},P_i)\,\Pi(P_i,P_{i-1})$ では，変換規則 (1.35) のもとで中点 P_i の変換行列がちょうど相殺し，変換行列は，端点 P_{i+1} と P_{i-1} のみに現れる．こうして，微小平行移動の行列の積が途中の座標変換のとり方によらず定まることが示された．なお，以上の議論から分かる通り，平行移動の行列 $\Pi_C(P,Q)$ は，P のまわりの座標変換 $x \to x'$ と Q のまわりの座標変換 $y \to y'$ に対し，

$$[\Pi_C(P,Q)]^\rho{}_\sigma \ \to\ \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\alpha}\Big|_P\,[\Pi_C(P,Q)]^\alpha{}_\beta\,\frac{\partial y^\beta}{\partial y'^\sigma}\Big|_Q$$

と変換する．

である．なお，定義から分かるように，何をもって平行というかはどのような $\boldsymbol{\Gamma}$ を採用するかに依る．

P と Q が近接し，同じ座標系（座標値 x と座標値 $x-\epsilon$）で表されているときは，$\Pi(P,Q)=\mathrm{e}^{-\epsilon^\mu \boldsymbol{\Gamma}_\mu}$ となり ($\mathrm{d}x^\lambda=\epsilon^\lambda$)，$\epsilon$ の 1 次までで

$$\hat{\Pi}(P,Q)\,\partial_\sigma|_Q=\left(\mathrm{e}^{-\epsilon^\mu \boldsymbol{\Gamma}_\mu}\right)^\rho{}_\sigma\,\partial_\rho|_P\equiv\left[\delta^\rho_\sigma-\epsilon^\mu(x)\,\Gamma^\rho_{\mu\sigma}(x)\right]\partial_\rho|_P \tag{1.38}$$

となる．このときの $v^{\parallel}_P$ は

$$\begin{aligned} v^{\parallel}_P &= \hat{\Pi}(P,Q)\left[v^\sigma(x-\epsilon)\,\partial_\sigma|_Q\right]=v^\sigma(x-\epsilon)\,\hat{\Pi}(P,Q)\,\partial_\sigma|_Q\\ &=\left[v^\sigma-\epsilon^\mu\,\partial_\mu v^\sigma\right](x)\left[\delta^\rho_\sigma-\epsilon^\mu\,\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\right](x)\,\partial_\rho|_P\\ &=\left[v^\rho-\epsilon^\mu\left(\partial_\mu v^\rho+\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\,v^\sigma\right)\right](x)\,\partial_\rho|_P \end{aligned} \tag{1.39}$$

となる．従って，ベクトル場 v の ϵ 方向の**共変微分**を，各点 P で

$$(\nabla_\epsilon v)_P\equiv v_P-v^{\parallel}_P=\left[\nabla_\epsilon v^\rho(x)\right]\partial_\rho|_P \tag{1.40}$$

と定義すれば，係数は

$$\nabla_\epsilon v^\rho=\epsilon^\mu\,\nabla_\mu v^\rho=\epsilon^\mu\left(\partial_\mu v^\rho+\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\,v^\sigma\right) \tag{1.41}$$

で与えられる．

余接空間の $T^*_Q\mathcal{M}$ から $T^*_P\mathcal{M}$ への平行移動は，$T_P\mathcal{M}$ と $T^*_P\mathcal{M}$ のペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle$（脚注 1 参照）が平行移動のもとで保たれることを要請することで定まり，

$$\omega^{\parallel}_{P,\rho}=\omega_{Q,\sigma}\left[\Pi^{-1}_C(P,Q)\right]^\sigma{}_\rho=\omega_{Q,\sigma}\left[\mathrm{P}\exp\left(-\int_P^Q\mathrm{d}x^\mu\,\boldsymbol{\Gamma}_\mu(x)\right)\right]^\sigma{}_\rho \tag{1.42}$$

となる[*8)]．これより，$\omega=\omega_\rho\,\mathrm{d}x^\rho$ の ϵ 方向の共変微分

$$(\nabla_\epsilon\omega)_P\equiv\omega_P-\omega^{\parallel}_P=\left[\nabla_\epsilon\,\omega_\rho(x)\right]\mathrm{d}x^\rho|_P \tag{1.43}$$

が，

$$\nabla_\epsilon\omega_\rho=\epsilon^\mu\,\nabla_\mu\omega_\rho=\epsilon^\mu\left(\partial_\mu\omega_\rho-\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\,\omega_\sigma\right) \tag{1.44}$$

で与えられる．一般のテンソル $T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ については，次となる：

$$\nabla_\epsilon T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots}=\epsilon^\mu\,\nabla_\mu T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots}=\epsilon^\mu\left(\partial_\mu T^{\rho\cdots}_{\sigma\cdots}+\Gamma^\rho_{\mu\alpha}\,T^{\alpha\cdots}_{\sigma\cdots}+\cdots-\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\,T^{\rho\cdots}_{\alpha\cdots}-\cdots\right). \tag{1.45}$$

さて今まで $\boldsymbol{\Gamma}$ は何でもよかったが，平行移動に対して以下の 2 つの仮定を置くことで $\boldsymbol{\Gamma}$ は一意に定まる．

---

*8) 自然なペアリングのもとでは，双対空間に対する線形作用素は右から作用することに注意せよ．

まず，平行移動のもとで内積が変わらないとする．つまり，任意の接ベクトル $v_Q,\, w_Q \in T_Q\mathcal{M}$ とそれらの平行移動 $v_P^{\parallel} = \hat{\Pi}(P,Q)\, v_Q,\, w_P^{\parallel} = \hat{\Pi}(P,Q)\, w_Q \in T_P\mathcal{M}$ に対して，

$$\langle v_P^{\parallel},\, w_P^{\parallel}\rangle_P = \langle v_Q,\, w_Q\rangle_Q \tag{1.46}$$

であるとする．これは，微小な平行移動については次の条件と同等である：

$$\Leftrightarrow \quad \langle v_P - \nabla_\epsilon v_P\,,\ w_P - \nabla_\epsilon w_P\rangle_P = \langle v_Q,\, w_Q\rangle_Q\,, \tag{1.47}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} g_{\mu\nu}(x)\,[\,v^\mu(x) - \nabla_\epsilon v^\mu(x)]\,[\,w^\nu(x) - \nabla_\epsilon w^\nu(x)] \\ = g_{\mu\nu}(x-\epsilon)\, v^\mu(x-\epsilon)\, w^\nu(x-\epsilon) \end{array}\right]. \tag{1.48}$$

最後の式は，次のものと等価である：

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{1.49}$$

次に，任意の点 P（座標値 x）において $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu},\, \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = 0$ となる座標系 x が常にとれることを要請する．すると，任意の座標系において

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \tag{1.50}$$

でなくてはならないことがすぐに分かる．

2 つの条件 (1.49) と (1.50) を合わせると，接続 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ は次のものに一意に定まる（例えば [5] を見よ）：

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, g^{\lambda\sigma}\left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \equiv \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}. \tag{1.51}$$

このときのアフィン接続を **Levi–Civita 接続**と呼び，以下これを採用する．なお，$\left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ は **Christoffel 記号**と呼ばれる．

1.1.6 Killing ベクトルと共形 Killing ベクトル

平行移動は計量を変えないが，微分同相写像 f のひき戻しは一般に計量を変える．とくに計量を不変に保つ微分同相写像を**等長写像** (isometry) という：

$$(f^* g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (f：\text{等長写像})\,. \tag{1.52}$$

微小変換 $x^\mu \mapsto f^\mu(x) = x^\mu + \xi^\mu(x)$ については，これが等長変換であることと，式 $\pounds_\xi g_{\mu\nu} = 0$ が成り立つことは同値である．このベクトル場 $\xi = \xi^\mu\,\partial_\mu$ を **Killing ベクトル場**と呼ぶ：

$$\begin{aligned} 0 &= \pounds_\xi g_{\mu\nu} \quad (\xi：\text{Killing}) \\ &= \xi^\lambda\,\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi^\lambda\, g_{\lambda\nu} + \partial_\nu \xi^\lambda\, g_{\mu\lambda} \\ &= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu\,. \end{aligned} \tag{1.53}$$

2 つの Killing ベクトル場 ξ_1 と ξ_2 の定数係数の線形結合は Killing ベクトル場である．さらに，公式 (1.29) より，その Lie 括弧も Killing ベクトル場になる：

$$\pounds_{[\xi_1,\xi_2]}\, g_{\mu\nu} = \left[\pounds_{\xi_1}, \pounds_{\xi_2}\right] g_{\mu\nu} = 0\,. \tag{1.54}$$

従って，Killing ベクトル場の全体は Lie 代数を作る．

計量のひき戻しが自身の関数倍になる場合，長さは保たなくても各点での角度（あるいは形）は保つ．このような微分同相写像を**共形写像** (conformal map) と呼ぶ：

$$(f^*g)_{\mu\nu} = \rho\, g_{\mu\nu} \quad (f：\text{共形写像})\,. \tag{1.55}$$

このとき，微小変換 $x^\mu \;\mapsto\; f^\mu(x) \;=\; x^\mu + \xi^\mu(x)$ について，$\pounds_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = \sigma\, g_{\mu\nu}$ が成り立つ．両辺のトレースをとることにより，σ は $\sigma = (2/d)\,\nabla_\lambda\xi^\lambda$ と求まる．このベクトル場 $\xi = \xi^\mu\,\partial_\mu$ を**共形 Killing ベクトル場** (conformal Killing vector field) と呼ぶ：

$$\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = \frac{2}{d}\,\nabla_\lambda\xi^\lambda\, g_{\mu\nu} \quad (\xi：\text{共形 Killing})\,. \tag{1.56}$$

1.1.7　曲率テンソル

定義から明らかなように，平行移動は経路 C のとり方に依存する．とくに，微小なループに沿って平行移動されたベクトルは必ずしも出発点のものと同じにならず，結果が異なっているほど，より曲がった時空であると解釈される．

今，点 P（座標値 x）を起点とする平行四辺形 C［4 点を $P(x)$, $P_1(x+\epsilon_1)$, $P_2(x+\epsilon_1+\epsilon_2)$, $P_3(x+\epsilon_2)$ とする］に沿ってベクトル $v_P \in T_P\mathcal{M}$ を平行移動させてみよう．簡単な計算により，

$$\hat{\Pi}_C(P,P) = \hat{\Pi}(P,P_3)\,\hat{\Pi}(P_3,P_2)\,\hat{\Pi}(P_2,P_1)\,\hat{\Pi}(P_1,P) = \mathrm{e}^{-\epsilon_1^\mu\epsilon_2^\nu\,\hat{\boldsymbol{R}}_{\mu\nu}} \tag{1.57}$$

となることが分かる．ここで，$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mu\nu}$ の行列表示

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mu\nu}\,\partial_\beta|_P = R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta\,\partial_\alpha|_P \tag{1.58}$$

は

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} \equiv \left(R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta\right) = \partial_\mu\boldsymbol{\Gamma}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{\Gamma}_\mu + [\boldsymbol{\Gamma}_\mu,\, \boldsymbol{\Gamma}_\nu] \tag{1.59}$$

$$\left(R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta = \partial_\mu\Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\rho}\,\Gamma^\rho_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\,\Gamma^\rho_{\mu\beta}\right) \tag{1.60}$$

で与えられる．$R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta$ は **Riemann 曲率テンソル**と呼ばれる．$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mu\nu}$ は $T_P\mathcal{M}$ をそれ自身に移す線形写像であるため，$R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta$ は共変的である．直接の計算によっても，これが共変な (1,3)-テンソル場であることが確かめられる．また次の公式が成り立つ：

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, v^\alpha = R_{\mu\nu}{}^\alpha{}_\beta\, v^\beta\,, \tag{1.61}$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, v_\alpha = R_{\mu\nu\alpha}{}^\beta\, v_\beta = -R_{\mu\nu}{}^\beta{}_\alpha\, v_\beta\,. \tag{1.62}$$

なお，Levi–Civita 接続の曲率テンソルは，

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(-\partial_\mu\partial_\alpha g_{\nu\beta} + \partial_\mu\partial_\beta g_{\nu\alpha} + \partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\nu\partial_\beta g_{\mu\alpha}\right) - g_{\rho\sigma}\left(\Gamma^\rho_{\mu\alpha}\,\Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\rho_{\mu\beta}\,\Gamma^\sigma_{\nu\alpha}\right) \tag{1.63}$$

と書き直すことができるため，次の対称性を持つことが分かる：

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = R_{\alpha\beta\mu\nu}\,, \tag{1.64}$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0\,. \tag{1.65}$$

Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ と **Ricci スカラー** R は次で定義される：

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \equiv g^{\alpha\beta}\, R_{\mu\alpha\nu\beta}\,, \quad R \equiv g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu}\,. \tag{1.66}$$

1.1.8 測地線とアフィンパラメーター

d 次元 Lorentz 多様体 $\mathcal{M}$ の中の 2 点 x と y を結ぶ**測地線**は次のようにして求まる．まず，経路（世界線）を表すために，1 次元のパラメーター λ と d 個の関数

$$X^\mu(\lambda) \quad \left[\lambda_i \le \lambda \le \lambda_f\,,\ X^\mu(\lambda_i) = x^\mu\,,\ X^\mu(\lambda_f) = y^\mu\right] \tag{1.67}$$

を導入する．このとき，接ベクトル $\dot{X}^\mu$ が空間的か時間的かに応じて世界線の長さは

$$I_0[X^\mu(\lambda)] \equiv \pm \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \mathrm{d}\lambda\, \sqrt{\pm g_{\mu\nu}(X)\,\dot{X}^\mu\,\dot{X}^\nu} \tag{1.68}$$

で与えられ，測地線は $I_0[X^\mu(\lambda)]$ の極値として決まる*9)．しかしながら，ヌルの場合には上の形の変分問題が定義できない．そこで，ヌルの場合でも扱えるように，補助変数 $e(\lambda)$ を導入して新しい作用汎関数

$$I[X^\mu(\lambda), e(\lambda)] = \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} \mathrm{d}\lambda \left[\frac{1}{2e}\, g_{\mu\nu}(X)\,\dot{X}^\mu\,\dot{X}^\nu + \sigma\,\frac{e}{2}\right] \tag{1.69}$$

を導入する．ここで，世界線が空間的･時間的･ヌルかに応じて，$\sigma = +1,\ -1,\ 0$ とする．このときの運動方程式は，e の変分から

$$\sigma\, e^2 = g_{\mu\nu}(X)\,\dot{X}^\mu\,\dot{X}^\nu \tag{1.70}$$

---

*9) 以下の議論では，世界線の接ベクトルは常に空間的・時間的・ヌルのいずれかでありつづけると仮定する．世界線が途中でいろいろな場合も取る一般の場合については後の 6.1.1 節で議論する．

となり，一方，X^μ の変分から

$$\ddot{X}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\dot{X}^\alpha\,\dot{X}^\beta = \frac{\dot{e}}{e}\,\dot{X}^\mu \tag{1.71}$$

となる．(1.70) と (1.71) の 2 式が測地線の方程式である．なお，空間的あるいは時間的な場合には ($\sigma = \pm 1$)，第 1 式の (1.70) を $I[X^\mu, e]$ に代入すると $I_0[X^\mu]$ が得られるので，2 つの作用は等価であることが分かる．

さて，今考えているのは，世界線の形状であって，$X^\mu(\lambda)$ の関数形そのものではない．そのため，世界線をどのようにパラメトライズするかには本来不定性がある．実際，作用 $I_0[X^\mu]$ や $I[X^\mu, e]$ は次の 1 次元微分同相変換 $f:\ \lambda \mapsto f(\lambda)$ のもとで不変である*10)：

$$X^\mu(\lambda) \to \tilde{X}^\mu(\lambda) = X^\mu\big(f(\lambda)\big)\,, \tag{1.72}$$

$$e(\lambda) \to \tilde{e}(\lambda) = \dot{f}(\lambda)\,e\big(f(\lambda)\big)\,. \tag{1.73}$$

このゲージ変換を用いることにより，常に $\dot{e}(\lambda) = 0$ とすることができる．このようなパラメーターを**アフィンパラメーター**と呼ぶ．

アフィンパラメーターの取り方にはまだ不定性が残っていることに注意しよう．実際，λ がアフィンパラメーターでもゲージ変換 $f(\lambda)$ が $\dot{f}(\lambda) = (\text{定数})$ を満たすならば，$\lambda' = f(\lambda)$ は再びアフィンパラメーターとなる．このように，アフィンパラメーターには

$$\lambda \to a\,\lambda + b \tag{1.74}$$

という不定性がある．時間的な場合のアフィンパラメーターで，とくに $e(\tau) = 1$ となるもの［つまり $g_{\mu\nu}\big(X(\tau)\big)\,\dot{X}^\mu(\tau)\,\dot{X}^\nu(\tau) = -1$ となるもの］を**固有時間**と呼び，以下では記号 τ で表すことにする．これにはまだ並進の不定性

$$\tau \to \tau + \text{定数} \tag{1.75}$$

が残っている．

共変微分を用いると測地線に対して新しい幾何学的意味を与えられる．今軌跡 $X^\mu(\lambda)$（λ はアフィンとは限らない）について点 $x = X(\lambda)$ における接ベクトルを次のように書く：

$$u^\mu\big(X(\lambda)\big) \equiv \frac{\mathrm{d}X^\mu(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,. \tag{1.76}$$

このとき，軌跡に沿った「点 $X^\mu(\lambda - \delta\lambda) = X^\mu(\lambda) - \delta\lambda\, u^\mu\big(X(\lambda)\big)$ から点 $X^\mu(\lambda)$ への微小平行移動」は $u^\mu_\parallel = u^\mu - \delta\lambda\ u^\rho \nabla_\rho u^\mu$ で与えられる．ここで，

$$u^\rho \nabla_\rho u^\mu = u^\rho\left(\partial_\rho u^\mu + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\,u^\sigma\right) = \frac{\mathrm{d}^2 X^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\,\frac{\mathrm{d}X^\rho}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}X^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.77}$$

*10) これらは，区間 $[\lambda_i, \lambda_f]$ を 1 次元多様体とみたときの "スカラー場" $X^\mu(\lambda)$ と "1-形式" $e(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$ の引き戻しになっていることに注意せよ：$\tilde{X}^\mu = f^* X^\mu$, $\tilde{e}\,\mathrm{d}\lambda = f^*(e\,\mathrm{d}\lambda)$.

であるから，測地線の方程式 (1.71)：$\ddot{X}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\,\dot{X}^{\rho}\,\dot{X}^{\sigma} \propto \dot{X}^{\mu}$ は，

$$u^{\rho}\nabla_{\rho}u^{\mu} \propto u^{\mu} \tag{1.78}$$

と同じである．これは，$u_{\parallel} \propto u$ となること，つまり接ベクトル u が経路上で常に平行であることを意味する．つまり測地線とは「まっすぐ進む軌跡」である．なお，λ がアフィンパラメーターの場合は測地線の式は $u^{\rho}\nabla_{\rho}u^{\mu} = 0$ となる．

1.1.9 Einstein 方程式

$g_{\mu\nu}(x)$ のダイナミクスを規定する方程式を書き下す．作用として，一般座標変換不変なものを微分展開の 2 次までとれば，

$$S_{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)] = \frac{1}{16\pi G_d}\int \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\left[-2\Lambda + R\right] \tag{1.79}$$

となる．これを **Einstein–Hilbert 作用**という．ここで，G_d は d 次元 **Newton 定数**で，Λ は**宇宙定数**である．なお，微分展開の高次補正としては，$\int \mathrm{d}^d x\,[\,a\,R^2 + b\,R^2_{\mu\nu} + c\,R^2_{\mu\nu\alpha\beta}]$ などがある．変分の公式 $\delta\sqrt{-g} = (\sqrt{-g}/2)\,g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$，$\delta R = -R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + \nabla^{\mu}\,\nabla^{\nu}\,\delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\,\nabla_{\alpha}\nabla^{\alpha}\delta g_{\mu\nu}$ を用いると，

$$\delta_g S_{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)] = \frac{1}{16\pi G_d}\int \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\delta g_{\mu\nu}\left[-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,R\,g^{\mu\nu} - \Lambda\,g^{\mu\nu}\right] \tag{1.80}$$

を得る（境界からの寄与は無視した）．一方，粒子の作用（軌跡は時間的とし固有時をとる）は，世界線の長さに質量パラメーター m をかけたものになり，

$$\begin{aligned}
&S_{\mathrm{mat}}[g_{\mu\nu}(x), X^{\mu}(\tau)] \\
&= \frac{m}{2}\int \mathrm{d}\tau\,\left[g_{\mu\nu}\big(X(\tau)\big)\,\dot{X}^{\mu}(\tau)\,\dot{X}^{\nu}(\tau) - 1\right] \\
&= \frac{m}{2}\left[\int \mathrm{d}^d x\,g_{\mu\nu}(x)\int \mathrm{d}\tau\,\delta^d\big(X(\tau) - x\big)\,\dot{X}^{\mu}(\tau)\,\dot{X}^{\nu}(\tau) - \int \mathrm{d}\tau\,1\right]
\end{aligned} \tag{1.81}$$

である．これより，

$$\begin{aligned}
&\delta_g S_{\mathrm{mat}}[g_{\mu\nu}(x), X^{\mu}(\tau)] \\
&= \frac{m}{2}\int \mathrm{d}^d x\,\delta g_{\mu\nu}(x)\int \mathrm{d}\tau\,\delta^d\big(X(\tau) - x\big)\,\dot{X}^{\mu}(\tau)\,\dot{X}^{\nu}(\tau)
\end{aligned} \tag{1.82}$$

となる．こうして，全系の作用

$$S[g_{\mu\nu}(x), X^{\mu}(\tau)] = S_{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu}(x)] + S_{\mathrm{mat}}[g_{\mu\nu}(x), X^{\mu}(\tau)] \tag{1.83}$$

に対する $g_{\mu\nu}$ の運動方程式 $\delta_g S = 0$ は，

$$R^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\,R\,g^{\mu\nu}(x) = -\Lambda\,g^{\mu\nu}(x) + 8\pi G_d\,T^{\mu\nu}_{\mathrm{mat}}(x) \tag{1.84}$$

となる．ここで，$T^{\mu\nu}_{\rm mat}$ は粒子の**エネルギー運動量テンソル**で，

$$T^{\mu\nu}_{\rm mat}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \int \mathrm{d}\tau\, \delta^d\big(X(\tau)-x\big)\, m\, \dot{X}^\mu(\tau)\, \dot{X}^\nu(\tau) \tag{1.85}$$

である．相互作用しない粒子が複数ある場合，エネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu}_{\rm mat}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a \int \mathrm{d}\tau_a\, \delta^d\big(X_a(\tau_a)-x\big)\, m_a\, \dot{X}^\mu_a(\tau_a)\, \dot{X}^\nu_a(\tau_a) \tag{1.86}$$

と一般化される．ここで，$X^\mu_a(\tau_a)$ は粒子 a の軌跡を表し，τ_a はその固有時である．$p^\mu_a \equiv m_a\, \dot{X}^\mu_a$ は粒子 a のエネルギー運動量ベクトルであるから，(1.86) 式は，$T^{\mu\nu}_{\rm mat}$ がエネルギー運動量ベクトル p^μ のカレントになっていることを示している．この $T^{\mu\nu}_{\rm mat}$ は次の保存則を満たすことに注意しよう：

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{\rm mat}(x) = 0\,. \tag{1.87}$$

実際，公式 $\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = (\partial_\lambda \sqrt{-g})/\sqrt{-g}$ より，(1.87) 式の左辺は

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{\rm mat}(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \partial_\mu\big(\sqrt{-g}\, T^{\mu\nu}_{\rm mat}\big)(x) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}(x)\, T^{\mu\lambda}_{\rm mat}(x)\\
&= \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \sum_a \int \mathrm{d}\tau_a\, \delta^d\big(X_a(\tau_a)-x\big)\, m_a\, \big[\ddot{X}^\nu_a + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}\, \dot{X}^\mu_a \dot{X}^\lambda_a\big](\tau_a)
\end{aligned} \tag{1.88}$$

と変形され，測地線の方程式を用いてゼロになる．

上では相互作用しない粒子系のみを考えたが，一般にはそれらは相互作用し，また，電磁場やスカラー場といった場の自由度も入ってくる．重力以外の自由度をすべて物質場と呼ぶことにし，その作用を $S_{\rm mat} = \int \mathrm{d}^d x\, \mathcal{L}_{\rm mat}$ と書けば，全系の作用は次で与えられる：

$$S \equiv S_{\rm EH} + S_{\rm mat}\,. \tag{1.89}$$

このとき，物質場のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}_{\rm mat}$ は

$$\delta_g S_{\rm mat} \equiv \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-g}\, \frac{1}{2}\, \delta g_{\mu\nu}\, T^{\mu\nu}_{\rm mat} \tag{1.90}$$

で定義される．多くの場合，宇宙項を $T^{\mu\nu}_{\rm mat}$ と合わせてしまい，

$$T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{\rm mat} - \frac{\Lambda}{8\pi G_d}\, g^{\mu\nu} \tag{1.91}$$

と書く*11)．このとき，**Einstein テンソル**

---

*11) $\Lambda/8\pi G_d$ のことを**真空エネルギー** (vacuum energy) 密度あるいは**ダークエネルギー** (dark energy) 密度などと呼ぶことも多い．

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g^{\mu\nu} \tag{1.92}$$

を用いて，運動方程式は次の形にまとまる：

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G_d\, T^{\mu\nu}\,. \tag{1.93}$$

これを **Einstein 方程式**という．ここで左辺の Einstein テンソルは公式 $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ を満たすが［(A.14) 式］，これはエネルギー運動量テンソルの保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ と矛盾しない．

例 1．実スカラー場

$$S_{\rm mat} = \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu\phi\, \partial_\nu\phi - V(\phi) \right], \tag{1.94}$$

$$T^{\mu\nu}_{\rm mat} = \nabla^\mu\phi\, \nabla^\nu\phi - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha\phi\, \partial_\beta\phi + V(\phi) \right]. \tag{1.95}$$

例 2．電磁場 $(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$

$$S_{\rm mat} = \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4} g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, F_{\mu\nu}\, F_{\alpha\beta} \right], \tag{1.96}$$

$$T^{\mu\nu}_{\rm mat} = F^{\mu\alpha}\, F^{\nu}{}_{\alpha} - \frac{1}{4} \left(F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) g^{\mu\nu}\,. \tag{1.97}$$

例 3．完全流体

完全流体のエネルギー運動量テンソルは，流体が静止している局所慣性系で次の形をとる（e はエネルギー密度，P は圧力）：

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e & & & \\ & P & & \\ & & P & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.98}$$

これは，巨視的熱力学量に対する微分展開の 0 次項である．微分展開の次の寄与を取り入れると，粘性流体を記述できるようになる．こうした散逸を伴う場合でも，エネルギー運動量テンソルの保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ が成立する．これについては，2.3.1 節と 2.4 節で詳しく議論する．

1.1.10　エネルギー条件

ハミルトニアンの正値性や力学系としての安定性を反映して，エネルギー運動量テンソルも何らかの条件を満たしていることが期待される．こうした条件を**エネルギー条件**といい，Einstein 方程式に対する一般的議論を展開する際に作業仮説として用いられる．エネルギー条件にはいくつかのバリエーションがある．

- **支配的エネルギー条件** (dominant energy condition)

  各点における任意の未来方向の時間的ベクトル $u = u^\mu \partial_\mu$（つまり $u^2 < 0$ かつ $u^\mu \mathsf{f}_\mu < 0$ *12)）について，ベクトル

$$J^\mu \equiv -T^\mu{}_\nu u^\nu \tag{1.99}$$

  は未来方向の時間的ベクトルかヌルベクトルになる（つまり $J^2 \leq 0$ かつ $J^\mu \mathsf{f}_\mu < 0$）．この条件は，上の例 3 の完全流体に対しては次を意味する：

$$e > 0 \quad \text{かつ} \quad e \geq |P| \quad (\text{支配的}). \tag{1.100}$$

- **弱いエネルギー条件** (weak energy condition)

  任意の時間的またはヌルのベクトル u^μ（つまり $u^2 \leq 0$）について，

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0. \tag{1.101}$$

  完全流体に対しては次を意味する：

$$e \geq 0 \quad \text{かつ} \quad e + P \geq 0 \quad (\text{弱い}). \tag{1.102}$$

- **ヌルエネルギー条件** (null energy condition)

  任意のヌルベクトル u^μ（つまり $u^2 = 0$）について，

$$T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0. \tag{1.103}$$

  完全流体に対しては次を意味する：

$$e + P \geq 0 \quad (\text{ヌル}). \tag{1.104}$$

- **強いエネルギー条件** (strong energy condition)

  任意の時間的またはヌルのベクトル u^μ（つまり $u^2 \leq 0$）について，

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2} T^\alpha_\alpha g_{\mu\nu}\right) u^\mu u^\nu \geq 0. \tag{1.105}$$

  この条件は，Einstein 方程式を使うと次と等価である:

$$R_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \geq 0. \tag{1.106}$$

  完全流体に対しては次を意味する：

$$e + \frac{d-1}{d-3} P \geq 0 \quad \text{かつ} \quad e + P \geq 0 \quad (\text{強い}). \tag{1.107}$$

最初の 3 条件の中では「ヌルエネルギー条件」が条件として一番弱く，

$$(\text{支配的}) \Rightarrow (\text{弱い}) \Rightarrow (\text{ヌル}) \tag{1.108}$$

である．強いエネルギー条件は他の 3 条件とはまったく独立のものである．

---

*12) ベクトル場 f^μ の定義については 3 ページを参照.

1.2 Raychaudhuri 方程式と超曲面の幾何学

d 次元時空 $\mathcal{M}$ において，ある曲線の集まりで，開集合 $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ 上の任意の点 $p \in \mathcal{O}$ を通る曲線がちょうど1つ存在するものは，$\mathcal{O}$ における**コングルエンス** (congruence) と呼ばれる．これは，ある滑らかなベクトル場 $u = u^\mu \partial_\mu$ を用いて，u を接ベクトルとする積分曲線の集合として与えられる．接ベクトル u が常に時間的 $(u^2 < 0)$，空間的 $(u^2 > 0)$，ヌル $(u^2 = 0)$ のとき，そのコングルエンスは時間的，空間的，ヌルであると呼ばれる．とくに，コングルエンスを構成する全ての曲線が測地線のとき（つまり接ベクトル u が $u^\nu \nabla_\nu u^\mu \propto u^\mu$ を満たすとき），そのコングルエンスを**測地線束**と呼ぶ．

以下では，コングルエンスに含まれる曲線同士が，互いにどのように近づいたり回転するかを特徴付ける幾何学量について説明する*13)．

1.2.1 時間的または空間的な場合

まずは，時間的または空間的な接ベクトル $u = u^\mu \partial_\mu$ を持つコングルエンスを考えよう．以下，u は

$$u^\mu u_\mu = \varepsilon(u) \equiv \mp 1 \tag{1.109}$$

と規格化されているとする．ここで，u が時間的な場合には $\varepsilon(u) = -1$，空間的な場合には $\varepsilon(u) = +1$ である．まず，u に垂直な方向への射影テンソルを

$$h_\mu{}^\nu(x) \equiv \delta_\mu^\nu - \varepsilon(u)\, u_\mu(x)\, u^\nu(x) \tag{1.110}$$

で定義すると，これは自明に

$$u^\mu h_\mu{}^\nu = 0\,, \quad h_\mu{}^\rho h_\rho{}^\nu = h_\mu{}^\nu\,, \quad h_\mu{}^\mu = d-1 \tag{1.111}$$

を満たす．また，$h_{\mu\nu} \equiv h_\mu{}^\rho g_{\rho\nu} = g_{\mu\nu} - \varepsilon(u)\, u_\mu u_\nu$ は対称テンソルである．

さて，コングルエンスの振る舞いを調べるために，ベクトル場 u の共変微分 $\nabla_\mu u_\nu$ を考えると，これは射影テンソル $h_\mu{}^\nu$ を用いて次のように分解される [(1.109) より $u^\nu \nabla_\mu u_\nu = 0$ となることに注意]：

$$\nabla_\mu u_\nu = \varepsilon(u)\, u_\mu a_\nu + K_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\,, \quad a_\nu \equiv u^\mu \nabla_\mu u_\nu\,, \tag{1.112}$$

$$K_{\mu\nu} \equiv h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma \nabla_{(\rho} u_{\sigma)}\,, \quad \omega_{\mu\nu} \equiv h_\mu{}^\rho h_\nu{}^\sigma \nabla_{[\rho} u_{\sigma]}\,. \tag{1.113}$$

ここで，$a = a^\mu \partial_\mu$ は "速度ベクトル場" u の "加速度ベクトル場" にあたる量で，規格化された u と直交する $(u^\mu a_\mu = 0)$.

---

*13) ここでの議論は [1], [3], [6], [7] を参考にした.

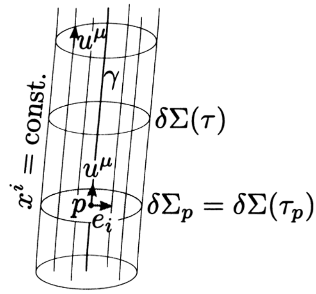


図 1.5　コングルエンスの断面.

$K_{\mu\nu}$ や $\omega_{\mu\nu}$ の幾何学的意味

$K_{\mu\nu}$ や $\omega_{\mu\nu}$ の幾何学的意味を理解するため，コングルエンスが測地線束 ($a^\mu = 0$) の場合を考えてみよう*14)．そのため，コングルエンスの中から基準となる 1 つの測地線 γ を選び，その近傍に以下の手順で座標系を導入する．

まず，γ 上の 1 点 p に着目し，点 p を含む微小曲面 $\delta\Sigma_p$ を，γ 近傍の測地線が $\delta\Sigma_p$ とちょうど 1 回交わるように，かつ，$\delta\Sigma_p$ と γ が点 p で直交するように選ぶ（図 1.5）．基準測地線 γ を固有時間 τ でパラメトライズしたときの p の固有時が τ_P であるとき，この微小曲面 $\delta\Sigma_p$ を，固有時 τ_p におけるコングルエンスの断面と呼ぶ．なお，点 p 以外の点でも測地線と直交するように断面 $\delta\Sigma_p$ を選ぶことは，一般には不可能である．従って，点 p から離れた点での $\delta\Sigma_p$ の定め方には不定性が残るが，以下の議論には影響しない．

次に，他の測地線の固有時間 τ に対して，$\delta\Sigma_p$ 上ですべて $\tau = \tau_p$ となるように固有時間の原点を固定する．また，$\delta\Sigma_p$ 上に座標 y^i $(i = 1, \ldots, d-1)$ を導入する．こうして，$\delta\Sigma_p$ の各点を通る測地線上で y^i の値を一定とすることで，基準測地線 γ の近傍に局所座標系 (τ, y^i) を導入することができる．以下，τ の値が一定の面を $\delta\Sigma(\tau)$ と記す．

時空の座標 x^μ と座標系 (τ, y^i) の関係を $x^\mu = x^\mu(\tau, y^i)$ という関数で表すことにすると，それぞれの測地線上で y^i が一定であることから，$u = \partial/\partial\tau = u^\mu \partial_\mu$ $(u^\mu = \partial x^\mu/\partial\tau)$ と書くことができる*15)．また，$e_i \equiv \partial/\partial y^i = e_i^\mu \partial_\mu$ $(e_i^\mu = \partial x^\mu/\partial y^i)$ は各断面 $\delta\Sigma(\tau)$ に接するベクトル場である．e_i は隣り合う測地線同士をつなぐベクトルなので，以下，e_i を測地線間の相対位置ベクトルと呼ぶことにする．

さて，測地線 γ の近傍全体で，u と e_i は $0 = \partial^2 x^\mu/\partial\tau\,\partial y^i - \partial^2 x^\mu/\partial y^i\,\partial\tau = \left[u, e_i\right]^\mu = \nabla_u e_i^\mu - \nabla_{e_i} u^\mu$ を満たすため，次の式を得る：

$$\nabla_u e_i^\mu = \nabla_{e_i} u^\mu \,. \tag{1.114}$$

*14)　ここではとくに，u^μ が時間的ベクトルとして議論するが，空間的ベクトルの場合でも全く同様の議論が行える．

*15)　τ は固有時刻なので，u^μ の規格化条件 $u^\mu u_\mu = -1$ は満たされている．

この式と測地線の式 $u^\nu \nabla_\nu u^\mu = 0$ および $u_\nu \nabla_\mu u^\nu = 0$ より，γ の近傍全体で

$$u^\nu \partial_\nu \big(e_i^\mu u_\mu\big) = \big(\nabla_u e_i^\mu\big) u_\mu = \left(\nabla_{e_i} u^\mu\right) u_\mu = 0 \tag{1.115}$$

が成立する．こうして，$e_i^\mu u_\mu$ は各測地線上で一定値となるが，とくに γ については p において $e_i^\mu u_\mu = 0$ であったので，γ 上のすべての点で $e_i^\mu u_\mu = 0$，つまり γ 上の u は常に $\delta\Sigma(\tau)$ に直交する．ただし，$\delta\Sigma_p$ 上の p 以外の点では一般には $u_\mu e_i^\mu \neq 0$ であったため，γ 以外の測地線上では $u_\mu e_i^\mu = 0$ とはならない．

時間微分を $\mathrm{D}/\mathrm{D}\tau \equiv u^\nu \nabla_\nu$ で導入すると，γ 上では，隣り合う測地線同士の相対位置ベクトル e_i の時間微分は

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau} e_i^\mu \equiv u^\nu \nabla_\nu e_i^\mu \equiv B^\mu{}_\nu\, e_i^\nu \quad \big(B_{\mu\nu} \equiv h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma \nabla_\sigma u_\rho\big) \tag{1.116}$$

と書くことができる．ここで $B^\mu{}_\nu$ は，相対位置ベクトル $e_i(\tau - \mathrm{d}\tau)$ を測地線 γ に沿って固有時 τ の点まで平行移動させたものと $e_i(\tau)$ とを関係づける変換行列であり，その対称成分と反対称成分が，(1.113) の $K_{\mu\nu}$ および $-\omega_{\mu\nu}$ である．とくに，$\omega_{\mu\nu}$ はコングルエンスがどれだけ捩れていくかを表す量で，回転率 (vorticity) などと呼ばれる．

$K_{\mu\nu}$ の幾何学的な意味を，より理解しやすくするため，$\delta\Sigma(\tau)$ 上の**誘導計量** (induced metric) [*16)] を

$$h_{ij} \equiv e_i^\mu\, e_j^\nu\, g_{\mu\nu} \tag{1.117}$$

で導入し，その逆行列を h^{ij} と記そう．e_i^μ の添え字 i は h_{ij} と h^{ij} で上げ下げし，添え字 μ は $g_{\mu\nu}$ とその逆で上げ下げすることにする．このとき，断面 $\delta\Sigma(\tau)$ における微小領域 $\mathrm{d}^{d-1}x$ の体積は

$$\delta V = \sqrt{h}\,\mathrm{d}^{d-1}x \quad \left[\sqrt{h} \equiv \sqrt{\det\left(h_{ij}\right)}\right] \tag{1.118}$$

と書け，$\mathrm{d}^{d-1}x$ が τ に依らず一定であることを用いると，体積の変化率は

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\,\delta V = \frac{\sqrt{h}}{2}\, h^{ij}\, \frac{\mathrm{D}h_{ij}}{\mathrm{D}\tau}\, \mathrm{d}^{d-1}x \tag{1.119}$$

となる．ここで，誘導計量の時間微分は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}h_{ij}}{\mathrm{D}\tau} &\equiv u^\rho\, \nabla_\rho \big(e_i^\mu\, e_j^\nu\, g_{\mu\nu}\big) = 2\, g_{\mu\nu}\, u^\rho\, \nabla_\rho e_{(i}^\mu\, e_{j)}^\nu = 2\, e_{(i}^\rho\, e_{j)}^\nu\, g_{\mu\nu}\, \nabla_\rho u^\mu \\ &= 2\, e_i^\mu\, e_j^\nu\, B_{(\nu\mu)} = 2\, e_i^\mu\, e_j^\nu\, K_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.120}$$

となり［(1.114) を用いた］，γ 上で成り立つ等式 $e_i^\mu\, e_j^\nu\, h^{ij} = h^{\mu\nu}$ を用いて

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\,\delta V = h^{ij}\, e_i^\mu\, e_j^\nu\, K_{\mu\nu}\, \delta V = h^{\mu\nu}\, K_{\mu\nu}\, \delta V \tag{1.121}$$

---

*16)　背景時空の計量 $g_{\mu\nu}$ を定めたとき，時空内部に埋め込まれた曲面上に誘起される計量のこと．

を得る．従って，$K_{\mu\nu}$ のトレース部分 $\theta \equiv \mathrm{tr}\, K \equiv h^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ は，コングルエンスの断面の体積の変化率を表す量であることが分かる：

$$\theta = \frac{1}{\delta V} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau} \delta V \,. \tag{1.122}$$

また，(1.120) から分かるように，$K_{\mu\nu}$ からトレース部分を抜き出したテンソル

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv K_{\langle\mu\nu\rangle} \equiv K_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1}\, \theta\, h_{\mu\nu} \tag{1.123}$$

は，コングルエンスの断面の，体積を変えない形状の変化率を記述する．以上のことから，θ は**膨張率** (expansion) と呼ばれ，$\sigma_{\mu\nu}$ は**せん断速度テンソル** (shear tensor) と呼ばれる．

Raychaudhuri 方程式（時間的／空間的な場合）

以下では，コングルエンスを構成する（時間的または空間的な）曲線が必ずしも測地線でない場合に，$K_{\mu\nu}$ や $\omega_{\mu\nu}$ の時間発展を記述する方程式を導く．まず，表式を簡単にするため，u^μ に直交する任意のテンソル $T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ に対する

$$D_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} \equiv h^{\mu_1}{}_{\rho_1} \cdots h^{\mu_p}{}_{\rho_p}\, h_{\nu_1}{}^{\sigma_1} \cdots h_{\nu_q}{}^{\sigma_p}\, \nabla_\lambda T^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} \tag{1.124}$$

という演算を導入する．これは

$$D_\lambda h_{\mu\nu} = h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma \nabla_\lambda h_{\rho\sigma} = h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma \nabla_\lambda \big[-\varepsilon(u)\, u_\rho\, u_\sigma\big] = 0 \tag{1.125}$$

を満たす演算である．これを用いると，

$$\begin{aligned}
&u^\lambda D_\lambda\big(K_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\big) = h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, \nabla_\lambda \big[\nabla_\rho u_\sigma - \varepsilon(u)\, u_\rho\, a_\sigma\big] \\
&= h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, \nabla_\rho \nabla_\lambda u_\sigma - h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, R^\kappa{}_{\sigma\lambda\rho}\, u_\kappa - \varepsilon(u)\, a_\mu\, a_\nu \\
&= h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, \nabla_\rho \big[\varepsilon(u)\, u_\lambda\, a_\sigma + K_{\lambda\sigma} + \omega_{\lambda\sigma}\big] \\
&\quad + h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, R_{\lambda\rho\sigma}{}^\kappa\, u_\kappa - \varepsilon(u)\, a_\mu\, a_\nu \\
&= D_\mu a_\nu - \varepsilon(u)\, a_\mu\, a_\nu \\
&\quad - \big(K_\mu{}^\lambda + \omega_\mu{}^\lambda\big)\big(K_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}\big) + h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, R_{\lambda\rho\sigma}{}^\kappa\, u_\kappa
\end{aligned} \tag{1.126}$$

が得られる．最後の等式で $h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, \nabla_\rho\, (K_{\lambda\sigma} + \omega_{\lambda\sigma}) = -\nabla_\rho u^\lambda\, (K_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu})$ を用いた．これを μ, ν について対称化または反対称化することで

$$\begin{aligned}
u^\lambda D_\lambda K_{\mu\nu} = D_{(\mu}a_{\nu)} - \varepsilon(u)\, a_\mu\, a_\nu& \\
- K_\mu{}^\lambda\, K_{\nu\lambda} + \omega_\mu{}^\lambda\, \omega_{\nu\lambda} + h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, R_{\lambda(\rho\sigma)\kappa}\, u^\kappa ,&
\end{aligned} \tag{1.127}$$

$$u^\lambda D_\lambda\, \omega_{\mu\nu} = D_{[\mu}a_{\nu]} + 2\, K_{[\mu}{}^\lambda\, \omega_{\nu]\lambda} + h_\mu{}^\rho\, h_\nu{}^\sigma\, u^\lambda\, R_{\lambda[\rho\sigma]\kappa}\, u^\kappa \tag{1.128}$$

を得る．さらに，$K_{\mu\nu}$ を膨張率とせん断速度テンソルに分解すると次を得る：

$$u^\lambda \partial_\lambda \theta = \nabla_\mu a^\mu - \frac{1}{d-1}\theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu R_{\mu\nu}\,, \tag{1.129}$$

$$u^\lambda D_\lambda \sigma_{\mu\nu} = -\varepsilon(u)\,a_{\langle\mu}\,a_{\nu\rangle} + \nabla_{\langle\mu}a_{\nu\rangle} - \sigma_{\langle\mu}{}^{\lambda}\,\sigma_{\nu\rangle\lambda} + \omega_{\langle\mu}{}^{\lambda}\,\omega_{\nu\rangle\lambda} - u^\lambda\,C_{\lambda\langle\mu\nu\rangle\kappa}\,u^\kappa\,, \tag{1.130}$$

$$u^\lambda D_\lambda\,\omega_{\mu\nu} = D_{[\mu}a_{\nu]} - 2\,\theta\,\omega_{\mu\nu} + 2\,\sigma_{[\mu}{}^{\lambda}\,\omega_{\nu]\lambda} + h_\mu{}^\rho\,h_\nu{}^\sigma\,u^\lambda\,R_{\lambda[\rho\sigma]\kappa}\,u^\kappa\,. \tag{1.131}$$

ここで,

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{2}{d-2}\Big(R_{\mu[\rho}\,g_{\sigma]\nu} - R_{\nu[\rho}\,g_{\sigma]\mu}\Big) - \frac{2\,R}{(d-1)\,(d-2)}\,g_{\mu[\sigma}\,g_{\rho]\nu} \tag{1.132}$$

は Weyl テンソルである．とくに，θ の時間発展を与える (1.129) 式を **（時間的／空間的な場合の） Raychaudhuri 方程式**と呼ぶ．

1.2.2 ヌル測地線束

次に，$k = k^\mu\,\partial_\mu$ を接ベクトルとするヌル測地線束を考える．以下，各ヌル測地線をアフィンパラメーター λ で記述し，接ベクトル $k = \partial/\partial\lambda$ は

$$k^\nu\,\nabla_\nu k^\mu = 0 \tag{1.133}$$

を満たすとする．時間的または空間的なコングルエンスの場合では，射影テンソル $h_\mu{}^\nu$ を用いて接ベクトル u に平行な方向と垂直な方向への分離を行ったが，ヌル測地線束の場合には k が自分自身とも直交するため ($k^2 = 0$)，k と直交する $(d-1)$ 個の独立な空間的または時間的ベクトルは存在しない*17)．そこでまず k とは独立な，$k^\mu\,l_\mu = -1$ を満たすヌルベクトル場 $l = l^\mu\,\partial_\mu$ を導入する．

l の選び方には任意性があるが，ここでは次のようにして l を定義する．まず，ヌル測地線束に含まれる全てのヌル測地線とちょうど一回だけ交わる滑らかな超曲面 Σ を用意し，Σ 上の各点で $k^\mu\,l_\mu = -1$ を満たす滑らかなヌルベクトル l を Σ 上で滑らかに与える（図 1.6）．ここで，Σ の選び方や l の与え方には不定性があるが，一度 Σ 上のヌルベクトル場 l を与えると，今度は Σ 上の各点を通る測地線に沿って l を平行移動していくことで，ヌル測地線束全体でヌルベクトル場 l を定義できる．この構成法を行うと，l は自動的に $\nabla_k l^\mu = 0$ を満たし，$\nabla_k(l^\mu\,l_\mu) = 0$ かつ $\nabla_k(l^\mu\,k_\mu) = 0$ が示される．すると，このヌルベクトル場 l は，Σ 上だけでなく，測地線束の至る所で $k^\mu\,l_\mu = -1$ かつ $l^\mu\,l_\mu = 0$ を満たすことが分かる．以下では，このようにして定義した l を用いることにする．

次に，k と l を用いて射影テンソルを

*17) もし存在すると $\det(g_{\mu\nu}) = 0$ となってしまう．

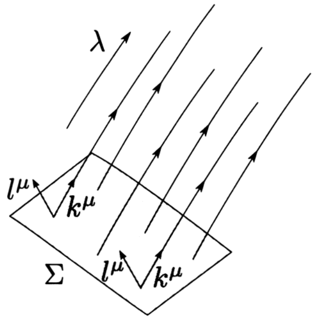


図 1.6　ヌル測地線束と超曲面 Σ.

$$q_\mu{}^\nu \equiv \delta^\nu_\mu + k_\mu\, l^\nu + l_\mu\, k^\nu \tag{1.134}$$

で定義すると，これは以下の関係を満たす：

$$q_\mu{}^\nu\, q_\nu{}^\rho = q_\mu{}^\rho\,,\quad q_\mu{}^\mu = d-2\,,\quad q_\mu{}^\nu\, k_\nu = 0 = q_\mu{}^\nu\, l_\nu\,, \tag{1.135}$$

$$k^\mu\, q_\mu{}^\nu = 0 = l^\mu\, q_\mu{}^\nu\,,\quad q^\mu{}_\nu\, \eta^\nu = \eta^\mu\,,\quad \eta_\nu\, q^\nu{}_\mu = \eta_\mu$$

$$\big(\eta^\mu:\ k_\mu\, \eta^\mu = 0 = l_\mu\, \eta^\mu \text{ を満たす任意の空間的ベクトル}\big)\,. \tag{1.136}$$

ここで，$q_{\mu\nu}$ の定義は l^μ の選び方に依存することに注意しよう．

Raychaudhuri 方程式（ヌルの場合）

時間的または空間的な場合と同様，ヌル測地線束の幾何学的な振る舞いは接ベクトル $k = k^\mu\,\partial_\mu$ の共変微分で特徴づけることができる．$\nabla_k k^\mu = 0$ を用いると，$\nabla_\mu k_\nu$ は一般に次のように分解される：

$$\nabla_\mu k_\nu = -k_\mu\,\nabla_l k_\nu - q_\mu{}^\rho\, k_\nu\, l^\sigma\,\nabla_\rho k_\sigma + \Theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\,, \tag{1.137}$$

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv q_\mu{}^\rho\, q_\nu{}^\sigma\, \nabla_{(\rho} k_{\sigma)}\,,\quad \omega_{\mu\nu} \equiv q_\mu{}^\rho\, q_\nu{}^\sigma\, \nabla_{[\rho} k_{\sigma]}\,. \tag{1.138}$$

時間的または空間的なコングルエンスの場合と同様，$\Theta_{\mu\nu}$ をトレース部分とトレースレス部分

$$\Theta \equiv g^{\mu\nu}\,\Theta_{\mu\nu} = q^{\mu\nu}\,\Theta_{\mu\nu}\,,\quad \sigma_{\mu\nu} \equiv \Theta_{\mu\nu} - \frac{1}{d-2}\,\Theta\, q_{\mu\nu} \tag{1.139}$$

に分解すると，これらはヌル測地線束の膨張率およびせん断速度を表す物理量であり，$\omega_{\mu\nu}$ はヌル測地線束の回転率を表す量である．

Θ の時間発展を記述する方程式は，時間的または空間的な場合と全く同様にして導くことができる．実際，(1.137) の両辺に $k^\rho\,\nabla_\rho$ を作用させ，左辺は $[\nabla_\rho, \nabla_\mu]\, k_\nu = -R^\sigma{}_{\nu\rho\mu}\, k_\sigma$ を用いて計算し，右辺は $\nabla_k k^\mu = 0$ や $\Theta = \nabla_\mu k^\mu$ などを用いて計算することで

$$k^\rho\,\nabla_\rho\Theta = -\frac{1}{d-2}\,\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} - k^\mu\, k^\nu\, R_{\mu\nu} \tag{1.140}$$

を得る．これは（ヌルの場合の）**Raychaudhuri 方程式**と呼ばれ，時間的／空間的な場合の式 (1.129) とは Θ^2 の係数の違いを除けば全く同じ形になる．

測地線偏差の方程式

次に，隣り合う測地線同士の位置関係が時間発展とともにどのように変化していくかを記述する**測地線偏差の方程式**（Jacobi 方程式とも呼ばれる）を導こう．まず，ヌル測地線束に含まれる 1 つのヌル測地線 γ に対し，その上の 1 点 p に着目して，点 p において k とも l とも直交する空間的ベクトル $\eta = \eta^\mu \partial_\mu$ を導入する．次に，点 p（座標値を x_p^μ とする）の無限小の近傍で $x^\mu(s) = x_p^\mu + s\,\eta^\mu + \mathcal{O}(s^2)$ で与えられる曲線を考え，点 $x^\mu(s)$ を通るヌル測地線を $\gamma(s)$ とラベルする．さらに，各測地線 $\gamma(s)$ にアフィンパラメーター λ を次のように導入する：(i) 曲線 $x^\mu(s)$ 上で $\lambda = \lambda_p$ であり，かつ (ii) 測地線群 $\{\gamma(s)\}$ 上で λ は滑らかに分布する．このようにして，測地線群 $\{\gamma(s)\}$ 上の点が $x^\mu(\lambda, s)$ と指定できるようになる．このとき，ヌル測地線の接ベクトル $k = k^\mu \partial_\mu$ と $\eta = \eta^\mu \partial_\mu$ は

$$k \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad \left(k^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}\right), \quad \eta \equiv \frac{\partial}{\partial s} \quad \left(\eta^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}\right) \tag{1.141}$$

で与えられ，次を満たす（このとき η を曲線 γ に沿った Lie 移動であるという）：

$$0 = [k, \eta]^\mu = \pounds_k \eta^\mu = \nabla_k \eta^\mu - \nabla_\eta k^\mu\,. \tag{1.142}$$

γ 上で，ベクトル $\eta\,\Delta s$ は点 $x^\mu(\lambda, 0) \in \gamma$ から点 $x^\mu(\lambda, \Delta s) \in \gamma(\Delta s)$ への空間的ベクトルになっており，η は**変位ベクトル** (deviation vector) と呼ばれる．

ここで時間微分 $\mathrm{D}/\mathrm{D}\lambda \equiv \nabla_k = k^\mu \nabla_\mu$ を導入し，変位ベクトルの時間微分（相対速度ベクトル）を計算すると，(1.142) を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}\eta^\mu}{\mathrm{D}\lambda} &\equiv \nabla_k \eta^\mu = \nabla_\eta k^\mu = \delta^\mu_\rho\, \eta^\nu \nabla_\nu k^\rho = \left(q^\mu{}_\rho - k^\mu\, l_\rho - l^\mu\, k_\rho\right) \eta^\nu\, \nabla_\nu k^\rho \\
&= \eta^\nu\, q^\mu{}_\rho\, \nabla_\nu k^\rho - k^\mu\, l_\rho\, \nabla_\eta k^\rho \\
&= B^\mu{}_\nu\, \eta^\nu \qquad \left(B^\mu{}_\nu \equiv q^{\mu\sigma}\, q_{\nu\rho}\, \nabla_\sigma k^\rho = \Theta_\nu{}^\mu + \omega_\nu{}^\mu\right)
\end{aligned} \tag{1.143}$$

となる．ここで，最後の等式で $\eta^\nu = \eta^\lambda\, q_\lambda{}^\nu$ および $l_\rho\, \nabla_\eta k^\rho = l_\rho\, \nabla_k \eta^\rho = -(\nabla_k l_\rho)\, \eta^\rho = 0$ を用いた．つまり，変位ベクトルは時間発展とともに，行列 $B^\mu{}_\nu$ の作用を受けることが分かる．

さらに，相対加速度ベクトルを計算すると，(1.142) と $\nabla_k k^\mu = 0$ を用いて

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{D}^2\eta^\mu}{\mathrm{D}\lambda^2} &= \nabla_k \nabla_k \eta^\mu = \nabla_k \nabla_\eta k^\mu = \nabla_\eta \nabla_k k^\mu + k^\rho\, \eta^\sigma\, R_{\rho\sigma}{}^\mu{}_\nu\, k^\nu \\
&= R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\, k^\nu\, k^\rho\, \eta^\sigma
\end{aligned} \tag{1.144}$$

となる．これが測地線偏差の方程式であり，測地線偏差の方程式の解 $\eta^\mu(\lambda)$ は Jacobi 場と呼ばれる．

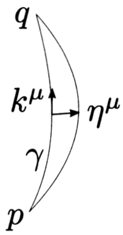


図 1.7　共役点.

共役点

次に，**共役点** (conjugate point) を定義し，共役点が現れるための必要十分条件が，その点で膨張率 Θ が発散することであることを示す．膨張率 Θ が発散する点では，無数の測地線が互いに交差するため，そのような交差点はしばしば**コースティック** (caustic) と呼ばれる．

あるヌル測地線 γ 上の 2 点 $p, q \in \gamma$ を考え，その上のある Jacobi 場 $\eta^\mu(\lambda)$ が，点 p と点 q でゼロベクトルになり，その間ではゼロベクトルでないとき，p と q は共役であるという（図 1.7）．

以下では，p の共役点 q で膨張率 Θ が発散することを示そう．まず，γ 上のある点で k^μ と l^μ に直交する独立な基底ベクトル E^μ_A $(A = 1, \ldots, d-2)$ を用意し，これを γ 上で平行移動させることで，γ 上の全体で $E^\mu_A(\lambda)$ を定義する $(\nabla_k E_A = 0)$．$\nabla_k\big(E^\mu_A\, k_\mu\big) = 0$ かつ $\nabla_k\big(E^\mu_A\, l_\mu\big) = 0$ となるので，E^μ_A は γ 上全体で k^μ と l^μ に直交し続ける．Jacobi 場も γ 上で k^μ と l^μ に直交するため，これを E^μ_A を用いて展開すると，一般に $\eta^\mu(\lambda) = \eta^A(\lambda)\, E^\mu_A$ と書ける［$(\mathrm{D}/\mathrm{D}\lambda)E^\mu_A = \nabla_k E^\mu_A = 0$ に注意］．すると，測地線偏差の方程式より

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta^A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} = \big(R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\, E^A_\mu\, k^\nu\, k^\rho\, E^\sigma_B\big)\, \eta^B(\lambda)\,. \tag{1.145}$$

を得る［$\nabla_k \eta^A(\lambda) = \mathrm{d}\eta^A(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ に注意］．ここで，E^A_μ は $E^A_\mu\, E^\mu_B = \delta^A_B$, $E^A_\mu\, k^\mu = 0 = E^A_\mu\, l^\mu$ を満たす双対基底である．これは $\eta^A(\lambda)$ に対する 2 階線形微分方程式なので，解は点 p における初期条件 $\eta^A|_p$ と $\mathrm{d}\eta^A/\mathrm{d}\lambda|_p$ で指定される．前提から $\eta^A|_p = 0$ なので，解は λ に依存する行列 $A^A{}_B(\lambda)$ を用いて

$$\eta^A(\lambda) = A^A{}_B(\lambda)\, \frac{\mathrm{d}\eta^B}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_p \quad \bigg(A^A{}_B|_p = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}A^A{}_B}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_p = \delta^A_B\bigg) \tag{1.146}$$

と書ける．$\eta^A(\lambda)$ は恒等的に 0 ではないため $\mathrm{d}\eta^A/\mathrm{d}\lambda|_p \neq 0$ であり，点 q で $\eta^A(\lambda_q) = 0$ となるためには $\det\big(A^A{}_B(\lambda_q)\big) = 0$ でなければならない．この式の意味を理解するため，$\det\big(A^A{}_B\big)$ と Θ の関係をみよう．

(1.143) の両辺を E^A_μ と縮約させることで

$$\frac{\mathrm{d}\eta^A(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = B^A{}_B(\lambda)\, \eta^B(\lambda) \quad \big(B^A{}_B(\lambda) \equiv E^A_\mu\, B^\mu{}_\nu(\lambda)\, E^\nu_B\big) \tag{1.147}$$

が得られるが，これに (1.146) を代入すると

$$\frac{\mathrm{d}A^A{}_B(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,\frac{\mathrm{d}\eta^B}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_p = B^A{}_B(\lambda)\,A^B{}_C(\lambda)\,\frac{\mathrm{d}\eta^C}{\mathrm{d}\lambda}\bigg|_p \tag{1.148}$$

を得る．$\mathrm{d}\eta^C/\mathrm{d}\lambda|_p$ は任意に選ぶことができるため，行列として

$$\frac{\mathrm{d}A^A{}_C(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = B^A{}_B(\lambda)\,A^B{}_C(\lambda) \tag{1.149}$$

が得られる．点 p と q の間では行列 $A^B{}_C(\lambda)$ は逆行列を持つため

$$B^A{}_B(\lambda) = \frac{\mathrm{d}A^A{}_C(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\,(A^{-1})^C{}_B(\lambda) \tag{1.150}$$

となり，トレースをとることで

$$\Theta(\lambda) = B^A{}_A(\lambda) = \frac{1}{\det\bigl(A^A{}_B(\lambda)\bigr)}\,\frac{\mathrm{d}\,\det\bigl(A^A{}_B(\lambda)\bigr)}{\mathrm{d}\lambda} \tag{1.151}$$

が得られる．この式より，点 q で $\det\bigl(A^A{}_B\bigr) = 0$ となることと同じ点で $\Theta \to -\infty$ となることが等価であることが示される [1], [6]．

1.2.3　Frobenius の定理

ベクトル場 $n = n^\mu\,\partial_\mu$ は，ある超曲面の法ベクトルとなっているとき**超曲面直交**（hypersurface orthogonal または surface forming）であると呼ばれる．つまり，ある関数 $f(x)$ が存在し，$n^\mu \propto g^{\mu\nu}\,\partial_\nu f$ と書けるとき，n は超曲面直交であるという*18)．

一般に，ベクトル場 n が超曲面直交である必要十分条件は **Frobenius の定理**で与えられる（詳しくは付録 B を見よ）：

Frobenius の定理 … 以下の主張は互いに等価である：

(1) $n = n^\mu\,\partial_\mu$ が超曲面直交である．

(2) n に直交する線形独立なベクトルの組 $\{e_i = e_i^\mu\,\partial_\mu\}$ $(i = 1, \ldots, d-1)$ が閉じた交換関係 $\bigl[e_i, e_j\bigr] = c_{ij}^k\,e_k$ （c_{ij}^k：滑らかな関数）を満たす．

(3) あるベクトル場 w が存在し，$\nabla_{[\mu}n_{\nu]} = n_{[\mu}\,w_{\nu]}$ と書ける．

(4) $n_{[\mu}\,\nabla_\nu n_{\rho]} = 0$ が成り立つ．

時間的または空間的な単位ベクトル場 u は，共変微分 $\nabla_\mu u_\nu$ が (1.113) のように展開できたため，u が超曲面直交になる必要十分条件は

$$0 = u_{[\mu}\,\nabla_\nu u_{\rho]} = u_{[\mu}\omega_{\nu\rho]} \tag{1.152}$$

と表せる．$u_{[\mu}\omega_{\nu\rho]} = 0$ を u^μ と縮約させることで $\omega_{\mu\nu} = 0$ が示せ，一方で

*18)　超曲面は $f =$ 一定面として特徴付けられ，超曲面の任意の接ベクトル v^μ が $0 = v^\mu\,\partial_\mu f \propto v_\mu\,n^\mu$ を満たすことから，確かに n^μ は超曲面に直交していることが分かる．

$\omega_{\mu\nu} = 0$ なら自明に $u_{[\mu}\omega_{\nu\rho]} = 0$ となるため，結局，次の結論を得る：

$$『u\text{ が超曲面直交である} \;\Leftrightarrow\; \omega_{\mu\nu} = 0』. \tag{1.153}$$

一方，ヌルベクトル場 k が超曲面直交になる必要十分条件は $k_{[\mu}\,\nabla_\nu k_{\rho]} = 0$ であり，これは (1.137) より，$0 = k_{[\mu}\nabla_\nu k_{\rho]} = k_{[\mu}\,\omega_{\nu\rho]}$ と書ける．従って，l^μ で縮約すると（1.2.2 節参照），ヌルベクトル場 k が超曲面直交になる必要十分条件も次のように表せる：

$$『k\text{ が超曲面直交である} \;\Leftrightarrow\; \omega_{\mu\nu} = 0』. \tag{1.154}$$

1.2.4　ヌル超曲面

ヌル超曲面の重要な性質を述べておく．**ヌル超曲面**とは，法ベクトルがヌルベクトルである超曲面のことで，前小節の最後にも出てきた．ある関数 $S(x)$ を用いてヌル超曲面 $\mathcal{N}$ を $S(x) =$ 一定と表すと，その法ベクトル k^μ は $k^\mu = \alpha(x)\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu S(x)$ ［$\alpha(x)$: ある関数］と書ける．すると，$\alpha(x)\,k^\mu\,\partial_\mu S(x) = k^\mu\,k_\mu = 0$ より，k^μ は $\mathcal{N}$ の接ベクトルでもある（図 1.8）．従って，ヌル超曲面とは，任意の接ベクトルに直交する，ゼロでない接ベクトル場 k^μ が存在する超曲面であるということもできる．

ヌル超曲面 $\mathcal{N}$ 上のヌル接ベクトル k^μ の積分曲線を $x^\mu(\lambda)$ とすると，$x^\mu(\lambda)$ はヌル測地線であることが示される．実際，$\nabla_k k^\mu = k^\rho\,\nabla_\rho k^\mu$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\nabla_k k^\mu &= \nabla_k\big[\alpha\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu S\big] = \big(\nabla_k \ln\alpha\big)\,k^\mu + \alpha\,g^{\mu\nu}\,\nabla_k\partial_\nu S \\
&= \big(\nabla_k \ln\alpha\big)\,k^\mu + \alpha\,k^\rho\nabla^\mu\partial_\rho S \quad (\because\ k^\rho\nabla_\rho\partial_\nu S = k^\rho\nabla_\nu\partial_\rho S) \\
&= \big(\nabla_k \ln\alpha\big)\,k^\mu + k^\rho\nabla^\mu\big(\alpha\,\partial_\rho S\big) - \nabla^\mu\alpha\,k^\rho\,\partial_\rho S \\
&= \big(\nabla_k \ln\alpha\big)\,k^\mu + \frac{1}{2}\,\nabla^\mu\big(k^\rho\,k_\rho\big) - \big(\nabla^\mu \ln\alpha\big)\,k^\rho\,k_\rho
\end{aligned} \tag{1.155}$$

であるが，$\mathcal{N}$ 上で $k^\rho\,k_\rho = 0$ となることと，$\nabla^\mu\big(k^\rho\,k_\rho\big)$ が k^μ に比例することから[*19)]

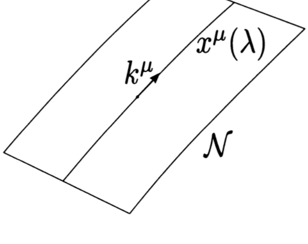


図 1.8　ヌル超曲面．

*19)　$k^\rho\,k_\rho$ は $\mathcal{N}$ 上で一定なので，$\mathcal{N}$ の任意の接ベクトル v^μ に対して $v^\mu\,\nabla_\mu\big(k^\rho\,k_\rho\big) = 0$ が成り立ち，$\nabla^\mu\big(k^\rho\,k_\rho\big)$ は k^μ に平行な成分しか持たないことが分かる．

$$\nabla_k k^\mu \propto k^\mu \tag{1.156}$$

が示され，$x^\mu(\lambda)$ はヌル測地線であることが分かる．

1.2.5 ADM 分解

d 次元時空 $\mathcal{M}$ が，$\mathbb{R}\times\Sigma$ ［Σ : $(d-1)$ 次元多様体］というトポロジーを持つ場合を考えよう．具体的には，$\mathcal{M}$ 上の連続関数 $t:\ \mathcal{M}\ni P\mapsto t(P)\in\mathbb{R}$ が存在し，$\Sigma_t\equiv\{P\in\mathcal{M}\ \big|\ t(P)=t\}$ はすべての t で Σ と微分同相で，次が成り立つとする：$\mathcal{M}=\bigcup_t\Sigma_t$, $\Sigma_t\cap\Sigma_{t'}=\phi\ (t\neq t')$．以下とくに，超曲面 Σ_t が至るところ時間的または空間的の場合を考える．その法ベクトル $n=n^\mu\,\partial_\mu$ は

$$n_\mu \propto \partial_\mu t \tag{1.157}$$

と書ける．これまでと同様，n が時間的な場合には $\varepsilon(n)=-1$，空間的な場合には $\varepsilon(n)=+1$ となる符号 $\varepsilon(n)$ を用いて，n を $n^2=\varepsilon(n)$ と規格化する．

それぞれの超曲面 Σ_t 上に座標系 (x^i) $(i=1,\dots,d-1)$ を導入し，それを用いてベクトル場

$$\mathsf{t}=\mathsf{t}^\mu\,\partial_\mu\equiv\partial_t\,,\quad e_i=e_i^\mu\,\partial_\mu\equiv\partial_i \tag{1.158}$$

を導入する．e_i は Σ_t の接ベクトルの基底をなしており，n に直交し，かつ

$$\big[\mathsf{t},\,e_i\big]=0\,,\quad \big[e_i,\,e_j\big]=0 \tag{1.159}$$

を満たす．また，t は一般に n に平行な成分と直交する成分に

$$\mathsf{t}^\mu=N(x)\,n^\mu+N^i(x)\,e_i^\mu \tag{1.160}$$

と分解でき，N を**ラプス関数**，$\vec{N}\equiv N^i\,e_i$ を**シフトベクトル**と呼ぶ（図 1.9）．

Σ_t 上の誘導計量を $h_{ij}\equiv e_i^\mu\,e_j^\nu\,g_{\mu\nu}$ で定義し，その逆行列を h^{ij} と記す．また，添え字 i は誘導計量 h_{ij} とその逆行列 h^{ij} で上げ下げする．$e^{i\mu}\equiv h^{ij}\,e_j^\mu$ は $e^{i\mu}\,e_i^\nu=h^{\mu\nu}\equiv g^{\mu\nu}-\varepsilon(n)\,n^\mu\,n^\nu$ を満たし，$e_{i\mu}\equiv e_i^\nu\,g_{\nu\mu}=e_i^\nu\,h_{\nu\mu}$ は $e_{i\mu}\,e_j^\mu=h_{ij}$ を満たす．このとき計量は次のようにパラメトライズできる：

$$\mathrm{d}s^2=\varepsilon(n)\,N^2\,\mathrm{d}t^2+h_{ij}\,\big(\mathrm{d}x^i+N^i\,\mathrm{d}t\big)\,\big(\mathrm{d}x^j+N^j\,\mathrm{d}t\big)\,. \tag{1.161}$$

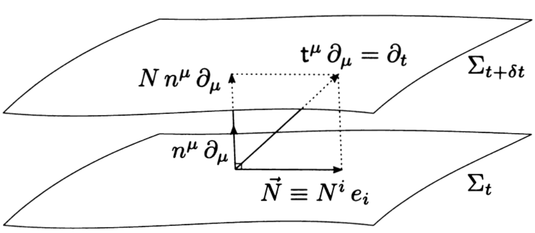


図 1.9　ADM 分解.

$$\Leftrightarrow \quad (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(n)\,N^2 + N_j\,N^j & N_i \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.162}$$

$$\Leftrightarrow \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \varepsilon(n)\,\frac{1}{N^2} & -\varepsilon(n)\,\frac{N^i}{N^2} \\ -\varepsilon(n)\,\frac{N^i}{N^2} & h^{ij} + \varepsilon(n)\,\frac{N^i\,N^j}{N^2} \end{pmatrix}. \tag{1.163}$$

このような形の計量の $(d-1)+1$ 分解は開発者の Arnowitt と Deser と Misner [9] に因んで **ADM 分解**と呼ばれる．後で便利なように，計量の変分を計算すると，$\delta g_{\mu\nu}$ は次のように分解される：

$$\begin{aligned}
&\delta g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \\
&= 2\,\varepsilon(n)\,N\,\delta N\,\mathrm{d}t^2 + 2\,h_{ij}\,\delta N^i\left(\mathrm{d}x^j + N^j\,\mathrm{d}t\right) \\
&\quad + \delta h_{ij}\left(\mathrm{d}x^i + N^i\,\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}x^j + N^j\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \left[\varepsilon(n)\,n_\mu\,n_\nu\,\frac{2\,\delta N}{N} + \varepsilon(n)\,e_{i(\mu}\,n_{\nu)}\,\frac{2\,\delta N^i}{N} + e^i_\mu\,e^j_\nu\,\delta h_{ij}\right]\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu\,.
\end{aligned} \tag{1.164}$$

外部曲率テンソル

超曲面 Σ_t の任意の接ベクトル場 v^μ, w^μ に対して，Σ_t の**外部曲率**テンソルを

$$K(v,w) \equiv \nabla_v n_\nu\,w^\nu = v^\mu w^\nu \nabla_\mu n_\nu\,(= -n_\nu\,\nabla_v w^\nu) \tag{1.165}$$

で定義すると

$$\begin{aligned}
K(v,w) &= v^{(\mu}\,w^{\nu)}\,\nabla_\mu n_\nu + v^{[\mu}\,w^{\nu]}\,\nabla_\mu n_\nu = v^{(\mu}\,w^{\nu)}\,\nabla_\mu n_\nu - \frac{1}{2}\,[v,\,w]^\mu\,n_\mu \\
&= \frac{1}{2}\,v^\mu\,w^\nu\,\pounds_n g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,v^\mu\,w^\nu\,\pounds_n h_{\mu\nu} = K(w,v)
\end{aligned} \tag{1.166}$$

となる（Frobenius の定理より $[v,\,w]^\mu\,n_\mu = 0$ を用いた）．これは，(1.113) 式で定義した $K_{\mu\nu}$ を用いると $K(v,w) = v^\mu\,w^\nu\,K_{\mu\nu}$ と書くことができる．

$(d-1)$ 次元の共変微分

次に，超曲面 Σ_t 上の任意の接ベクトル場 $v \equiv v^i\,e_i$ に対し，共変微分 D_i を

$$D_i v^j \equiv e^\nu_i\,e^j_\mu\,\nabla_\nu v^\mu \tag{1.167}$$

で定義しよう．$\partial_i = e^\mu_i\,\partial_\mu$ より

$$\begin{aligned}
D_i v^j &= e^\nu_i\,e^j_\mu\left(\partial_\nu v^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\,v^\rho\right) \\
&= e^\nu_i\,\partial_\nu\!\left(e^j_\mu\,v^\mu\right) - e^\nu_i\,v^\mu\,\partial_\nu e^j_\mu + e^\nu_i\,e^j_\mu\,\Gamma^\mu_{\nu\rho}\,v^\rho \\
&= \partial_i v^j - v^k e^\mu_k\,\partial_i e^j_\mu \\
&\quad + \frac{1}{2}\,h^{jl}\left(\partial_i h_{\rho\sigma}\,e^\rho_k\,e^\sigma_l + \partial_k h_{\nu\sigma}\,e^\nu_i\,e^\sigma_l - \partial_l h_{\rho\nu}\,e^\nu_i\,e^\rho_k\right)v^k \\
&= \partial_i v^j + {}^{(d-1)}\Gamma^j_{ik}\,v^k\,,
\end{aligned} \tag{1.168}$$

$${}^{(d-1)}\Gamma^j_{ik} \equiv \frac{1}{2}\,h^{jl}\left(\partial_i h_{lk} + \partial_k h_{il} - \partial_l h_{ik}\right) \tag{1.169}$$

となり，計量 h_{ij} の Levi–Civita 接続であることが分かる．(1.168) の最後の変形で (1.159) 式を用いた．また，(1.169) の接続を用いると，共変微分 D_i は Σ_t 上の任意のテンソル $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ に対して定義できる．

外部曲率テンソルは Σ_t 上のテンソルであり，これは，同じく Σ_t 上のテンソル量である $(N,\, N^i,\, h_{ij})$ およびそれらの共変微分 D_i を用いて表すことができる．実際に，ADM の座標系を用いると

$$K_{ij} \equiv K(e_i, e_j) = \frac{1}{2}\, e_i^\mu\, e_j^\nu\, \pounds_n h_{\mu\nu} = \frac{1}{2N}\, e_i^\mu\, e_j^\nu \left(\pounds_{\mathsf{t}} h_{\mu\nu} - \pounds_{\vec{N}} h_{\mu\nu}\right)$$
$$= \frac{1}{2N}\left(\partial_t h_{ij} - 2D_{(i}N_{j)}\right), \tag{1.170}$$

となる．ここで，最後の等式で $\pounds_{\mathsf{t}} e_i = [\mathsf{t}, e_i] = 0$ を用いて得られる等式

$$e_i^\mu\, e_j^\nu\, \pounds_{\mathsf{t}} h_{\mu\nu} = e_i^\mu\, e_j^\nu\, \partial_{\mathsf{t}} h_{\mu\nu} + \left(e_i^\mu\, \partial_\mu \mathsf{t}\right)^\rho e_j^\nu\, h_{\rho\nu} + e_i^\mu \left(e_j^\nu\, \partial_\nu \mathsf{t}\right)^\rho h_{\mu\rho}$$
$$= \partial_t\left(e_i^\mu\, e_j^\nu\, h_{\mu\nu}\right) = \partial_t h_{ij}\,, \tag{1.171}$$

を用いた．同様に，d 次元の Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ の各成分（つまり $n^\mu n^\nu R_{\mu\nu}$, $n^\mu e_i^\nu R_{\mu\nu}$, $e_i^\mu e_j^\nu R_{\mu\nu}$）も，$\Sigma_t$ 上のテンソルとその共変微分 D_i を用いて表すことができる．この公式の導出については付録 C で詳しく説明する．

1.3 Schwarzschild ブラックホール

この節では，最も簡単なブラックホール解の例として，Schwarzschild ブラックホールの幾何について詳しく説明する．

一般に，真空の Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, R\, g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu} = 0 \tag{1.172}$$

の球対称な解は，必ず次の Schwarzschild 計量で与えられる：

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2\,, \tag{1.173}$$
$$\mathrm{d}\Omega_2^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2\,. \tag{1.174}$$

この事実は **Birkhoff の定理**と呼ばれる．この定理の主張を確認しておこう．Schwarzschild 計量の成分をみると，いずれも時間座標 t に依っていないことが分かる．一般に，座標系を $(t,\, x^i)$ とするとき，計量の成分 $g_{\mu\nu}$ が t に依らないとすると，ベクトル場 $\mathsf{t} = \mathsf{t}^\mu\, \partial_\mu = \partial_t$ は Killing ベクトルになる．実際に，

$$\pounds_{\mathsf{t}} g_{\mu\nu} = \mathsf{t}^\rho\, \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu}\, \partial_\mu \mathsf{t}^\rho + g_{\mu\rho}\, \partial_\nu \mathsf{t}^\rho = \partial_t g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.175}$$

より，$\mathsf{t} = \partial_t$ は Killing 方程式を満たす．従って，Schwarzschild 時空では，時間的ベクトル ∂_t が Killing ベクトルになっている．一般に，時間的な Killing ベクトルを持つ時空は**定常**であると呼ばれる．とくに，時間的 Killing ベクト

ルが超曲面直交の場合には時空は**静的**であると呼ばれる．Schwarzschild 時空の場合，時間的 Killing ベクトル ∂_t は t 一定面に直交するため，これは静的時空であることが分かる．Birkhoff の定理は，たとえ星が膨張や収縮を繰り返して時間変動していても，全体の時空が球対称である限り，その星の外部の真空領域では重力場は静的となることを主張している．

1.3.1 いくつかの座標系

Schwarzschild 解を記述するいくつかのよく使われる座標系を導入する．

Schwarzschild 座標

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2\,. \tag{1.176}$$

Regge–Wheeler 座標

Regge–Wheeler 動径座標 r^* を

$$r^* \equiv r + 2GM\,\ln\!\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) \quad \left(-\infty < r^* < \infty, \quad r \geq 2GM\right) \tag{1.177}$$

で定義する．すると

$$\mathrm{d}r^* = \frac{\mathrm{d}r}{1 - \frac{2GM}{r}} \tag{1.178}$$

より，計量は次のように書ける：

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^{*2}\right) + r^2(r^*)\,\mathrm{d}\Omega_2^2\,. \tag{1.179}$$

この座標 r^* は，$r > 2GM$ の領域から $r = 2GM$ の位置に到達するのに無限の座標距離を要することから**亀座標** (tortoise coordinate) とも呼ばれる．

Eddington–Finkelstein 座標

Regge–Wheeler 座標を用いて，光円錐座標（またはヌル座標）

$$u \equiv t - r^*\,, \qquad v \equiv t + r^* \tag{1.180}$$

を導入すると，計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}v^2 + 2\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}r + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{1.181}$$

となる．この座標系 (v, r, θ, φ) では $r = 2GM$ の特異性が解消され，内向き **Eddington–Finkelstein 座標**と呼ばれる．あるいは，v 座標の代わりに u 座標を用いた (u, r, θ, φ) 座標系は外向き Eddington–Finkelstein 座標と呼ばれ，計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}u^2 - 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{1.182}$$

となる．

Kruskal–Szekeres 座標

Regge–Wheeler 座標の計量は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right) \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{1.183}$$

という形にも書くことができるが，ここで新たな光円錐座標

$$U \equiv -\,\mathrm{e}^{-\frac{u}{4GM}}\,, \quad V \equiv \mathrm{e}^{\frac{v}{4GM}} \quad (-\infty < U < 0\,,\ 0 < V < \infty) \tag{1.184}$$

を導入すると，計量は次のように書ける：

$$ds^2 = -\frac{32\,(GM)^3}{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{r}{2GM}}\, \mathrm{d}U\, \mathrm{d}V + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2\,. \tag{1.185}$$

さらに，この光円錐座標を用いて直交座標

$$T \equiv \frac{V+U}{2}\,, \qquad X \equiv \frac{V-U}{2} \tag{1.186}$$

を定義すると計量は

$$ds^2 = \frac{32\,(GM)^3}{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{r}{2GM}} \left(-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2\right) + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{1.187}$$

となる．これも $r = 2GM$ で特異性がなく，逆に $r = r(U,V)$ を $UV = -\,\mathrm{e}^{r/2GM}\,(r - 2GM)/(2GM)$ で定義されたものとして扱うことにより，(1.185), (1.186) の定義域を $-\infty < U < \infty$, $-\infty < V < \infty$, $-\infty < T < \infty$, $-\infty < X < \infty$ の全域に拡大することができる．また，$t = t(U,V)$ を $V/U = -\,\mathrm{e}^{t/2GM}$ で導入する．この座標系 (U,V,θ,φ) あるいは (T,X,θ,φ) は **Kruskal–Szekeres 座標**と呼ばれる．

Kruskal 時空には，U と V の符号に応じて 4 つの領域がある（図 1.10）．領域 I と II は内向き Eddington–Finkelstein 座標によって覆われる．また，外向き Eddington–Finkelstein 座標は領域 I と IV を覆っており，Schwarzschild 座標は領域 I のみを覆っている．$r = 2\,GM$ は $U = 0$ または $V = 0$ に対応する．また，$r = 0$ の曲率特異点は双曲線 $UV = 1$ に対応する．Schwarzschild 座標 $(r > 2GM)$ との対応は次で与えられる：

$$U = -\sqrt{\frac{r}{2\,GM} - 1}\ \mathrm{e}^{-\frac{t-r}{4GM}}\,, \quad V = \sqrt{\frac{r}{2\,GM} - 1}\ \mathrm{e}^{\frac{t+r}{4GM}}\,, \tag{1.188}$$

$$T = \mathrm{e}^{\frac{r^*}{4GM}}\ \sinh\!\left(\frac{t}{4\,GM}\right), \quad X = \mathrm{e}^{\frac{r^*}{4GM}}\ \cosh\!\left(\frac{t}{4\,GM}\right). \tag{1.189}$$

余談：Einstein–Rosen の橋（図 1.11）

$T = (V+U)/2 = 0$（あるいは $t = 0$）で与えられる 3 次元空間の計量は

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ell^2 &= \frac{32\,G^3 M^3}{r}\ \mathrm{e}^{-\frac{r}{2GM}}\, \mathrm{d}X^2 + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2 \\ &= \left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2 \end{aligned} \tag{1.190}$$

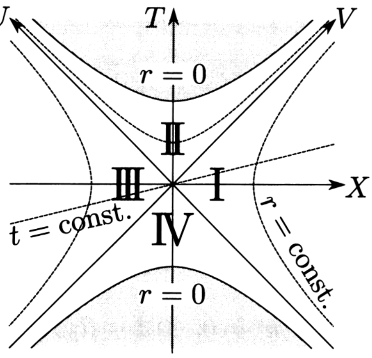


図 1.10　Kruskal 時空.

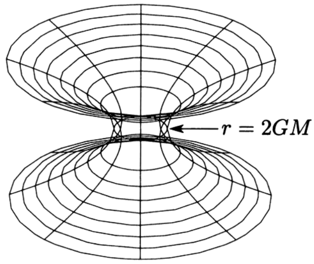


図 1.11　Einstein–Rosen の橋.

となる．とくに，$\theta = \pi/2$ に制限すると，この 2 次元空間は平坦な 3 次元空間

$$d\ell^2 = dz^2 + dr^2 + r^2\, d\varphi^2 \qquad (1.191)$$

の中に埋め込まれた超曲面 $z^2 = 8GM(r - 2GM)$ の計量そのものとなる．

1.4　Killing ホライズンと表面重力

Lorentz 多様体 $\mathcal{M}$ の Killing ベクトル場 ξ が，あるヌル超曲面 $\mathcal{H}$ 上でその法ベクトルになっているとき，その $\mathcal{H}$ を Killing ベクトル場 ξ の **Killing ホライズン**という．このとき ξ はもちろん $\mathcal{H}$ 上でヌルであるが，以下の議論では，$\mathcal{H}$ 以外の場所では ξ はヌルでなくてもよいとする．Killing ホライズンが重要なのは，定常な ブラックホールの未来イベントホライズンが Killing ホライズンになるからである．

Killing ホライズン上では以下の重要な定理が成り立つ．

定理 1.1　(1.143) で定義された $B_{\nu\mu} = q_\mu{}^\alpha q_\nu{}^\beta \nabla_\alpha k_\beta = \Theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$ は，Killing ホライズン $\mathcal{H}$ 上ではゼロである．つまり，

$$\sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = \Theta = 0 \quad (\text{Killing ホライズン } \mathcal{H} \text{ 上}). \qquad (1.192)$$

証明: まず $\mathcal{H}$ は超曲面なので，$\omega_{\mu\nu} = 0$ である．従って，$B_{\nu\mu} = q_\mu{}^\alpha q_\nu{}^\beta \nabla_{(\alpha} k_{\beta)}$ と書ける．今，ヌル測地線の接ベクトル $k = k^\mu \partial_\mu = \partial/\partial\lambda$（$\lambda$: アフィンパラメーター）は，Killing ベクトル場 $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ と比例関係にあるので，$k^\mu = f^{-1} \xi^\mu$ と書ける．このことと ξ が Killing ベクトル場であること $[\nabla_{(\alpha} \xi_{\beta)} = 0]$ より，

$$B_{\nu\mu} = q_\mu{}^\alpha q_\nu{}^\beta \partial_{(\alpha} f^{-1} \xi_{\beta)} = 0 \qquad (1.193)$$

となる（最後の等号では $q_\mu{}^\alpha \xi_\alpha = 0 = q_\nu{}^\beta \xi_\beta$ を使った）．　□

定理 1.2 Killing ホライズン $\mathcal{H}$ 上では次が成り立つ：

$$R_{\mu\nu}\,\xi^\mu\,\xi^\nu = 0 \quad (\text{Killing ホライズン } \mathcal{H} \text{ 上}). \tag{1.194}$$

<u>**証明**</u>: 上の定理から $\mathcal{H}$ 上で $\sigma_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} = \Theta = 0$. 従って，とくに $k^\rho\,\nabla_\rho\Theta = 0$. これらをヌルの場合の Raychaudhuri 方程式 (1.140)：

$$k^\rho\,\nabla_\rho\Theta = -\frac{1}{d-2}\,\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}\,k^\mu\,k^\nu \tag{1.195}$$

に代入すれば，$\mathcal{H}$ 上で $R_{\mu\nu}\,k^\mu\,k^\nu = 0$，つまり $R_{\mu\nu}\,\xi^\mu\,\xi^\nu = 0$ が得られる． □

さて，1.2.4 節の議論より，ヌル超曲面の法ベクトル（したがって接ベクトル）は必ずヌル測地線を生成することを思い出すと，Killing ベクトル場 ξ^μ はヌル超曲面 $\mathcal{H}$ 上でヌル測地線を生成し，次の測地線方程式が成立する:

$$\xi^\nu\,\nabla_\nu\xi^\mu = \kappa\,\xi^\mu\,. \tag{1.196}$$

右辺に現れた $\mathcal{H}$ 上の関数 κ は，Killing ホライズン $\mathcal{H}$ の**表面重力** (surface gravity) と呼ばれる．κ の値は Killing ベクトル場 ξ の規格化によるが，漸近的平坦な時空では，無限遠方で $\xi^2 \to -1$ となるように ξ を規格化することで，κ を自然に決めることができる．

κ を計算するには (1.196) の定義よりも以下で与える公式を使うほうが便利なことが多い．まず $\xi = \xi^\mu\,\partial_\mu$ は Killing ホライズン $\mathcal{H}$ の法ベクトルであるので，Frobenius の定理から

$$\xi_{[\mu}\,\nabla_\nu\xi_{\rho]}\big|_{\mathcal{H}} = 0 \tag{1.197}$$

を満たす（付録 B 参照）．これと Killing 方程式を用いると，$\mathcal{H}$ 上では

$$\xi_\rho\,\nabla_\mu\xi_\nu = -2\,\xi_{[\mu}\,\nabla_{\nu]}\xi_\rho \tag{1.198}$$

となる．これに $\nabla^\mu\xi^\nu = -\nabla^\nu\xi^\mu$ をかけて縮約すると $\mathcal{H}$ 上で

$$\begin{aligned}\xi_\rho\big(\nabla_\mu\xi_\nu\big)\,\big(\nabla^\mu\xi^\nu\big) &= -2\,\xi_\mu\,\nabla_\nu\xi_\rho\,\nabla^\mu\xi^\nu = -2\kappa\,\xi^\nu\,\nabla_\nu\xi_\rho \\ &= -2\kappa^2\,\xi_\rho\end{aligned} \tag{1.199}$$

が得られるため，$\xi = \xi^\mu\,\partial_\mu = 0$ となる点を除けば次の公式が成り立つ：

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}\,\big(\nabla^\mu\xi^\nu\big)\,\big(\nabla_\mu\xi_\nu\big)\big|_{\mathcal{H}}\,. \tag{1.200}$$

連続性から $\xi = 0$ となる点でもこの等式が成り立つ．

後で便利なように ∂_t を時間的 Killing ベクトルとする静的時空

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(x^k)\,\mathrm{d}t^2 + h_{ij}(x^k)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{1.201}$$

の表面重力の公式を与えておく．この計量で (1.200) の右辺の量を計算すると

$$-\frac{1}{2}\left(\nabla^{\mu}\mathrm{t}^{\nu}\right)\left(\nabla_{\mu}\mathrm{t}_{\nu}\right)=h^{ij}\,\partial_i N\,\partial_j N \tag{1.202}$$

となるため，$N(x^k)=0$ となるホライズンでこれを評価することで

$$\kappa=\sqrt{h^{ij}\,\partial_i N\,\partial_j N}\Big|_{\mathcal{H}} \tag{1.203}$$

となる．とくに，この時空では速度ベクトル場 $u=N^{-1}\,\partial_t$ に対する固有加速度ベクトル場 $a^{\mu}\equiv u^{\nu}\,\nabla_{\nu}u^{\mu}$ が $a_{\mu}=\partial_{\mu}N/N$ となることを用いて，

$$\kappa=(Na)|_{\mathcal{H}}\quad\left(a\equiv\sqrt{h^{ij}\,a_i\,a_j}\right) \tag{1.204}$$

と書くこともできる．

例として，(1.203) の公式から，Schwarzschild 時空の表面重力を求めてみよう．(1.174) の Schwarzschild 座標では，時空の時間的 Killing ベクトルは $\xi=\partial_t$ と書け，これは $r=2GM$ でヌルになるため，Killing ホライズンは $r=2GM$ で与えられる．すると，表面重力は

$$\kappa=\sqrt{g^{rr}}\,\partial_r\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}\Big|_{\mathcal{H}}=\frac{1}{2}\,\frac{2GM}{r^2}\Big|_{r=2GM}=\frac{1}{4GM} \tag{1.205}$$

と求まる．なお，$\xi^2=g_{00}(r)=-(1-2GM/r)$ より，ξ は $\xi^2\to-1$ $(r\to\infty)$ と規格化されている．

さて，一般に Killing ベクトル場 $\xi=\xi^{\mu}\,\partial_{\mu}$ に対しては恒等式 (A.18)

$$\nabla_{\rho}\nabla_{\mu}\xi^{\nu}=R^{\nu}{}_{\mu\rho\sigma}\,\xi^{\sigma} \tag{1.206}$$

が成り立つが，これを用いると，κ が ξ で生成される測地線に沿って一定であることが分かる:

$$\xi^{\rho}\,\partial_{\rho}\kappa^2\Big|_{\mathcal{H}}=-\xi^{\rho}\left(\nabla^{\mu}\xi^{\nu}\right)\nabla_{\rho}\nabla_{\mu}\xi_{\nu}\Big|_{\mathcal{H}}=-\left(\nabla^{\mu}\xi^{\nu}\right)R_{\nu\mu\rho\sigma}\,\xi^{\rho}\,\xi^{\sigma}\Big|_{\mathcal{H}}=0\,. \tag{1.207}$$

最後の等号では，曲率テンソルの反対称性 $R_{\nu\mu\rho\sigma}=-R_{\nu\mu\sigma\rho}$ を用いた．

1.5 分岐面とブラックホール熱力学の第ゼロ法則

1.4 節では，Killing ベクトル場 ξ の Killing ホライズン $\mathcal{H}$ について，ξ を接ベクトルとする $\mathcal{H}$ 内の各軌道上で，表面重力 κ が一定であることを見た．実は，各軌道の κ がゼロでないときには，$\mathcal{H}$ 全体で κ が同じ値になることが示せる．これを示すため，まず分岐面という概念を導入しよう．

1.5.1 分岐面

まず，$\mathcal{H}$ 上の $\xi=\xi^{\mu}\,\partial_{\mu}\neq0$ となる領域で，$\xi=\partial_v$ となる座標 v を導入する．この v は **Killing パラメーター**と呼ばれる．さて，$\xi=\partial/\partial v$ が生成する

1つの測地線をアフィンパラメーター λ を用いて記述してみよう．このときの接ベクトルを $k \equiv \partial/\partial\lambda$ とすれば，

$$k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0 \quad \left(k = \frac{\partial}{\partial\lambda}\right) \tag{1.208}$$

が成り立つ．これと (1.196) を比較し，軌道上で κ が一定であることを用いれば，

$$\xi = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}v}\frac{\partial}{\partial\lambda} = f(v)\,k \quad \left(f(v) \equiv \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}v}\right) \tag{1.209}$$

より，

$$\begin{aligned}\xi^\nu \nabla_\nu \xi^\mu &= f\,k^\nu \nabla_\nu (f\,k^\mu) = f\,(k^\nu \partial_\nu f)\,k^\mu = (\xi^\nu\,\partial_\nu f)\,\xi^\mu/f \\ &= \frac{\mathrm{d}\ln|f|}{\mathrm{d}v}\,\xi^\mu \equiv \kappa\,\xi^\mu \end{aligned} \tag{1.210}$$

となり，

$$f(v) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}v} = \pm\,\kappa\,\mathrm{e}^{\kappa v} \tag{1.211}$$

となる．ここで $\kappa > 0$ とし，また (1.211) の係数が $\pm\,\kappa$ となるように v の原点を選んだ．上の式をもう一度積分すれば，

$$\lambda = \pm\,\mathrm{e}^{\kappa v} \quad \left(\therefore\ f = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}v} = \kappa\,\lambda\right) \tag{1.212}$$

となる．こうして，ξ と k の間に

$$\xi^\mu = \pm\,\kappa\,\mathrm{e}^{\kappa v}\,k^\mu = \kappa\,\lambda\,k^\mu \tag{1.213}$$

という関係があることが分かる．(1.212) 式は，Killing パラメーター v が無限領域 $-\infty < v < \infty$ を動いても，アフィンパラメーター λ は半無限領域 $0 < \lambda < \infty$ または $0 > \lambda > -\infty$ しかとれないことを意味する．また，(1.213) 式より，$v \to -\infty$ の極限で ξ がゼロベクトルになることが分かる．

さて，これまでは ξ で生成される1つの軌道のみに注目していたが，ξ で生成されるすべての軌道を考えると，Killing ベクトル場 ξ の連続性より，各軌道上で $\xi = 0$ となる点の集合は $\mathcal{H}$ 内で余次元1の部分空間 B を構成する*20)．これは $\mathcal{M}$ の中では余次元2の部分空間である．B は**分岐面**と呼ばれ，分岐面 B を持つ Killing ホライズンを**分岐 Killing ホライズン**という．

例：Schwarzschild 時空

4次元 Schwarzschild 時空の Schwarzschild 座標系では時間的 Killing ベクトル場は $\xi = \partial_t$ であったが，これは，Kruskal–Szekeres 座標系（図 1.10）に

*20) n 次元多様体における $n-k$ 次元部分多様体は，**余次元** (codimension) k を持つと呼ばれる．

おいては,

$$\xi^\mu \partial_\mu = \frac{1}{4GM}\left(V\partial_V - U\partial_U\right)$$
$$= \kappa\left(V\partial_V - U\partial_U\right) \quad [(1.205)\text{ の表面重力 }\kappa\text{ を用いた}] \tag{1.214}$$

と書かれる．このベクトル場は，領域 $\{U=0\}\cup\{V=0\}$ でヌルになるため，$\mathcal{H}=\{U=0\}\cup\{V=0\}$ が Killing ホライズンであることが分かる．

とくに，$U=0$ の部分に着目すると，その上では $\xi|_{U=0}=\kappa V\partial_V$ である．ここで，(1.184) のパラメーター $v\equiv\kappa^{-1}\ln V$ を導入すると，$\xi|_{U=0}=\partial_v$ となるため，v は Killing パラメーターである．また，ヌルベクトル $k^\mu\equiv\partial_V$ $(\propto \xi^\mu|_{U=0})$ は，$k^\nu\nabla_\nu k^\mu=0$ となるため，V は $U=0$ 上のアフィンパラメーターである．

また，$U=0=V$ で与えられる球面は，その上で $\xi^\mu=0$ が成り立つことから分岐面である．これは，図 1.11 の Einstein–Rosen の橋の中間部分 $(r=2GM)$ にある S^2（図では 1 次元落ちているため S^1 に見える）に相当する．

1.5.2 ブラックホール熱力学の第ゼロ法則

(1.205) 式で，Schwarzschild 時空の場合には，表面重力が Killing ホライズン $\mathcal{H}$ 全体で定数であることを見たが，実は，一般に，Killing ホライズン $\mathcal{H}$ が分岐面を持てば，表面重力 κ は $\mathcal{H}$ 全体で定数になることが示せる[10]．この性質は 5.1 節でブラックホール熱力学の第ゼロ法則と呼ぶものである．

<u>**証明**</u>： ξ の軌道上で κ が一定であることはすでに示した．分岐面 $B\,(\subset\mathcal{H})$ 上では $\xi=0$ であるが，連続性より，そこでの κ は，B から伸びている各軌道の κ と一致している．従って，あとは B 上で κ が一定であることを示せばよい．今，$s=s^\mu\partial_\mu$ を B の任意の接ベクトルとする．すると，(1.207) 式を導いたのとまったく同様の計算により，

$$s^\rho\partial_\rho\kappa^2\big|_B = -s^\rho\left(\nabla^\mu\xi^\nu\right)\nabla_\rho\nabla_\mu\xi_\nu\big|_B = -\left(\nabla^\mu\xi^\nu\right)R_{\nu\mu\rho\sigma}\,s^\rho\,\xi^\sigma\big|_B \tag{1.215}$$

となる．B 上では $\xi=0$ であるから上式はゼロとなり，従って κ は B 上で一定である． □

1.6 Penrose–Carter 図式

時空全体の大域的な構造を理解するには，時空全体を Weyl 変換

$$\mathrm{d}s^2 \to \mathrm{d}\tilde{s}^2 = \Omega^2(x)\,\mathrm{d}s^2 \tag{1.216}$$

によりコンパクトな領域に写像するのが便利である．Weyl 変換はヌル曲線をヌル曲線に移すので時空の因果構造を変えない．ただし，変換後の時空は元の時空とは曲率などが異なっており，必ずしも Einstein 方程式を満たさない点に

注意が必要である．

共形因子 $\Omega(x)$ を無限遠でゼロになるように選ぶことで，変換後の計量では無限遠の点が有限のアフィンパラメーターで到達できるようになり，元の時空には含まれていなかった無限遠点が時空の一部として追加される．

以下では，具体例を通して Penrose–Carter 図式について説明する．

例：4 次元 Minkowski 時空

簡単な例として，まずは 4 次元 Minkowski 時空を考える：

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2 . \tag{1.217}$$

ヌル座標

$$U = \arctan(t-r)\,, \quad V = \arctan(t+r) \tag{1.218}$$

$$\left(-\pi/2 < U \le V < \pi/2\right) \tag{1.219}$$

を定義すると計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{1}{(2\cos U\,\cos V)^2}\left[-4\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V + \sin^2(V-U)\,\mathrm{d}\Omega_2^2\right] \tag{1.220}$$

となる．これは Weyl 変換により

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = (2\cos U\,\cos V)^2\,\mathrm{d}s^2 = -4\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V + \sin^2(V-U)\,\mathrm{d}\Omega^2 \tag{1.221}$$

と変換される．この計量を見ると分かるように，U 一定面および V 一定面はヌル超曲面である．従って，角度方向を潰して 2 次元の図を描くと図 1.12 のようになる．ここで，この図の各点は球面 S^2 を表している．境界 $U, V = \pm\pi/2$ は元の Minkowski 時空には含まれておらず共形無限遠 (conformal infinity) と呼ばれる領域である．いまの場合，共形無限遠は 3 点 ($i^\pm$, i^0) と 2 つのヌル超曲面 $\mathcal{I}^\pm$ で構成されている：

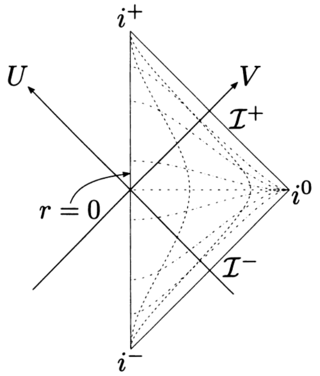


図 1.12　4 次元 Minkowski 時空の Penrose 図.

$$\begin{cases} i^{\pm}: & \text{未来／過去時間的無限遠} & (r: \text{有限}, t = \pm\infty) \\ i^{0}: & \text{空間的無限遠} & (r \to \infty, t: \text{有限}) \\ \mathcal{I}^{\pm}: & \text{未来／過去ヌル無限遠} & (r \mp t \text{ は有限のまま } r \to \infty, t = \pm\infty) \end{cases}$$

なお，図 1.12 内の $\mathcal{I}^-$ から内向きに斜め 45° の角度で進む直線は，無限遠から一様に縮小しながら進む光の球面波を表している．それはコースティックである $r = 0$ で 1 点に集まり，その後は再び広がって $\mathcal{I}^+$ へと向かう．また，任意の時間的測地線は i^- から始まり i^+ に到達し，任意の空間的測地線は i^0 から生じ，i^0 で終わる．

さらに，新たな座標 T, χ を

$$T = V + U\,, \quad \chi = V - U \tag{1.222}$$

$$(-\pi < T + \chi < \pi\,, \quad -\pi < T - \chi < \pi\,, \quad \chi \geq 0) \tag{1.223}$$

で導入すると，計量は

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2 = -\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\,\mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{1.224}$$

となる．この計量は，**Einstein 静的宇宙**と呼ばれる，スケール因子が $a(T) = 1$ の Friedmann–Robertson–Walker 宇宙

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}T^2 + a^2(T)\left(\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi\,\mathrm{d}\Omega_2^2\right) \tag{1.225}$$

$$(-\infty < T < \infty\,, \quad 0 \leq \chi \leq \pi) \tag{1.226}$$

の計量と一致する．Einstein 静的宇宙は，時間 T 方向の $\mathbb{R}$ と 3 次元単位球面 S^3 の直積の形をしており，$\mathrm{d}\Omega_2^2$ 方向を潰すと円筒の半分のような形をしている．座標領域を見ると，4 次元 Minkowski 時空はこの円筒の半分に埋め込まれた三角形の領域に対応することが分かる．

例：2 次元 Minkowski 時空と Rindler 時空

2 次元 Minkowski 時空

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 \quad (-\infty < t,\, z < \infty) \tag{1.227}$$

の場合にも，4 次元の場合と同様

$$U = \arctan(t - z)\,, \quad V = \arctan(t + z) \tag{1.228}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < U, V < \frac{\pi}{2}\right), \tag{1.229}$$

により，座標 U と V を導入すると計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{1}{(\cos U\ \cos V)^2}\,\mathrm{d}U\,\mathrm{d}V \tag{1.230}$$

となり，Weyl 変換により時空全体が図 1.13（左）の正方形にコンパクト化で

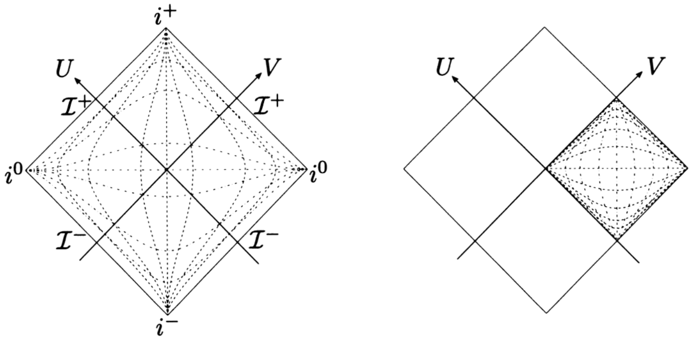


図 1.13　2 次元 Minkowski 時空（左）と Rindler 時空（右）の Penrose 図.

きる．境界 $U, V = \pm\pi/2$ は，元の時空には含まれていなかった無限遠である．

さて，元の座標系から（極座標への変換に似た）座標変換

$$t = z_{\rm R}\sinh(\kappa\, t_{\rm R})\,, \quad z = z_{\rm R}\cosh(\kappa\, t_{\rm R}) \tag{1.231}$$

$$(-\infty < t_{\rm R} < \infty\,, \quad 0 < z_{\rm R} < \infty)\,. \tag{1.232}$$

を行うと，計量は次のようになる：

$$\mathrm{d}s^2 = -(\kappa\, z_{\rm R})^2\mathrm{d}t_{\rm R}^2 + \mathrm{d}z_{\rm R}^2\,. \tag{1.233}$$

この座標系 $(t_{\rm R}, z_{\rm R})$ は Rindler 座標と呼ばれる．座標変換の形から分かるように，この座標系は Minkowski 時空のうち $z > |t|$ の領域のみを覆っており，この領域を **Rindler 時空**と呼ぶ．あるいは，この領域がくさび状の形をしていることから，**Rindler ウェッジ**と呼ばれることもある．Rindler 時空の境界 $z = |t|$ は，$\big\{\{U = 0\} \cup \{V = 0\}\big\} \cap \{V \geq U\}$ と表せ，Penrose 図式では，Rindler 時空は図 1.13（右）に描かれている領域に対応する．ここで，κ は Killing ホライズン $z_{\rm R} = 0$ の表面重力に対応するが，κ の値は $t_{\rm R}$ の再定義により自由に変えることができ，κ の値を特別なものに選ぶ原理はない．

例：Schwarzschild 時空

Kruskal–Szekeres 座標 (1.185) は U, V が $-\infty$ から $+\infty$ の無限のパラメーターを走っていた．そこで

$$U \equiv \tan\alpha\,, \quad V \equiv \tan\beta\,, \tag{1.234}$$

$$\big[-\pi/2 < \alpha < +\pi/2\,, \quad -\pi/2 < \beta < +\pi/2\big] \tag{1.235}$$

という座標変換を行うと，ヌル曲線が斜め 45° の直線になるという性質を保ったまま，パラメーター領域を有限の領域に抑えられる．しかも，曲率特異点 $r = 0$，つまり双曲線 $UV = \tan\alpha\,\tan\beta = 1$ は，$\alpha + \beta = \pm\pi/2$ という直線になることが分かる．この座標系を用いると図 1.14 のような Penrose 図が得られる．上と下の波線はそれぞれ 1 点 $(r = 0)$ を表している．

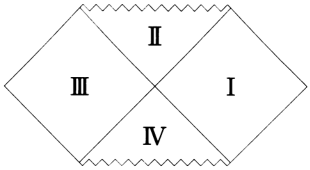


図 1.14　Schwarzschild 時空の Penrose 図.

例：de Sitter 時空

d 次元 de Sitter 時空 dS_d は，$(d+1)$-次元 Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,d}$

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{AB}\,\mathrm{d}X^A\,\mathrm{d}X^B \tag{1.236}$$

上の双曲面 $\eta_{AB}\,X^A\,X^B = \ell^2$ として定義される．これは，正の宇宙項を含む Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\,g_{\mu\nu} = -\Lambda\,g_{\mu\nu}\,, \quad \Lambda = \frac{(d-1)(d-2)}{2\ell^2} \tag{1.237}$$

の解である．

de Sitter 時空全体を覆うグローバル座標系は

$$\begin{aligned} &X^0 = \ell\,\sinh(\tau/\ell)\,, \qquad X^I = \ell\,\cosh(\tau/\ell)\,n^I \\ &\qquad (-\infty < \tau < \infty\,, \quad I = 1, \ldots, d) \end{aligned} \tag{1.238}$$

で与えられる．ここで，n^I は $\sum_{I=1}^{d}(n^I)^2 = 1$ を満たす $(d-1)$ 次元球面上の単位ベクトルであり，具体的に次のようにパラメトライズする：

$$\begin{cases} n^1 = \cos\theta_1 \qquad \big(0 \le \theta_1, \ldots, \theta_{d-2} \le \pi, \quad 0 \le \theta_{d-1} \le 2\pi\big)\,, \\ n^I = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{I-1}\,\cos\theta_I \qquad (2 \le I \le d-1)\,, \\ n^d = \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-2}\,\sin\theta_{d-1}\,. \end{cases} \tag{1.239}$$

グローバル座標系では，計量は次のように書ける：

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\tau^2 + \ell^2\,\cosh^2(\tau/\ell)\,\mathrm{d}\Omega_{d-1}^2\,. \tag{1.240}$$

さらに，新たな時間座標

$$T \equiv 2\arctan(\mathrm{e}^{\tau/\ell}) - \frac{\pi}{2} \qquad \big[\Leftrightarrow \cosh(\tau/\ell) = (\cos T)^{-1}\big]$$

を導入すると，τ が $-\infty$ から ∞ まで走るとき，T は $-\pi/2$ から $\pi/2$ を走る．この座標を用いると計量は次の形になる：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \ell^2\,(\cos T)^{-2}\,(-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}\Omega_{d-1}^2) \\ &= \ell^2\,(\cos T)^{-2}\,(-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2)\,. \end{aligned} \tag{1.241}$$

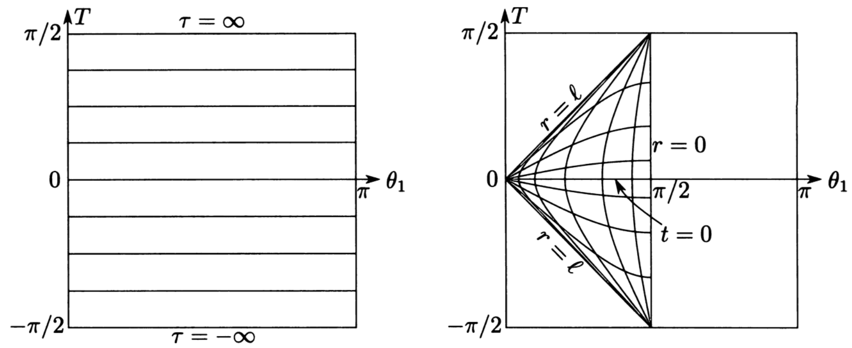


図 1.15 de Sitter 時空の Penrose 図.

de Sitter 時空の Penrose 図を図 1.15 に与えた［$\theta_I=\pi/2$ $(I=2,\dots,d-1)$ とした］. 左図の正方形の領域がグローバル座標が覆う de Sitter 時空全体である.

一方, de Sitter 時空の静的座標 (static coordinates) は, $0\le r<\ell$ として

$$\begin{cases} X^0=\sqrt{\ell^2-r^2}\,\sinh(t/\ell)\,, \quad X^d=\sqrt{\ell^2-r^2}\,\cosh(t/\ell)\,, \\ X^i=r\,n^i \qquad \left[i=1,\dots,d-1,\quad \sum_{i=1}^{d-1}(n^i)^2=1\right], \end{cases} \tag{1.242}$$

で与えられ, 計量は次のようになる：

$$\mathrm{d}s^2=-\left[1-(r/\ell)^2\right]\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{1-(r/\ell)^2}+r^2\,\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2\,. \tag{1.243}$$

この座標系は右図のように de Sitter 時空の一部のみを覆っている. この座標系が覆っている静的パッチに制限すれば, 時間的ベクトル ∂_t は Killing ベクトルになっている.

1.7 因果構造

本節では, 時空点の因果構造を記述したり, ホライズンの定義を行ったりするのに必要な概念や記号を導入する.

1.7.1 因果的依存領域

滑らかな曲線 γ の接ベクトルが至る所で未来（過去）方向の時間的ベクトルであるとき, γ は未来（過去）方向の**時間的曲線** (timelike curve) であると呼ばれる. また, 滑らかな曲線 γ の接ベクトルが未来（過去）方向の時間的またはヌルのベクトルであるとき, γ は未来（過去）方向の**因果的曲線** (causal curve) と呼ばれる. ある時空点 p を起点とし時空点 q を終点とする未来方向の時間的（因果的）曲線が少なくとも 1 つ存在するとき, $p\ll q$ $(p\prec q)$ と記すことに

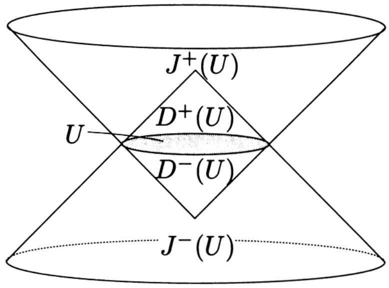


図 1.16　集合 U に関わる様々な領域.

する.

滑らかな曲線に関する以上の定義を用いて，ある点 p に関する以下の領域を定義する：

- $I^+(p)$, $I^-(p)$: 点 p の**時間的未来／過去** (chronological future/past)：

$$I^+(p) = \{q \in \mathcal{M} \,|\, q \gg p\}, \quad I^-(p) = \{q \in \mathcal{M} \,|\, q \ll p\}.$$

- $J^+(p)$, $J^-(p)$: 点 p の**因果的未来／過去** (causal future/past)：

$$J^+(p) = \{q \in \mathcal{M} \,|\, q \succ p\}, \quad J^-(p) = \{q \in \mathcal{M} \,|\, q \prec p\}.$$

これらの記号は集合に対しても定義され，例えばある集合 $U \subset \mathcal{M}$ の時間的未来／過去は $I^\pm(U) = \bigcup_{p \in U} I^\pm(p)$ と定義される（図 1.16）.

未来方向の因果的曲線 $\gamma : \mathbb{R} \ni t \to \gamma(t) \in \mathcal{M}$ に対して，ある点 $p \in \mathcal{M}$ の任意の近傍 $\mathcal{O}_p$ において $\gamma(t) \in \mathcal{O}$ $(\forall t > t_0)$ となる t_0 が存在するとき，点 p を γ の**未来的端点** (future endpoint) と呼ぶ．同様にして，**過去的端点** (past endpoint) も定義できる．そして，γ が未来的（過去的）端点を持たないとき，因果的曲線を未来（過去）に**延長不可能** (inextendible) と呼ぶ．とくに，未来にも過去にも延長不可能な因果的曲線は単に延長不可能と呼ぶ*21).

時空 $\mathcal{M}$ の部分集合 U について，U 内の任意の 2 点 p, q を結ぶ時間的曲線が存在しないとき，U を**非時間的** (achronal) という.

これらの定義を用いて，非時間的な超曲面 U の因果的な依存領域 $D^\pm(U)$ が次のように定義される（図 1.16）:

- <u>$D^+(U)$: U の**未来的依存領域** (future domain of dependence)：</u>

$$D^+(U)$$
$$\equiv \{p \in \mathcal{M} \mid p \text{ を通る任意の過去に延長不可能な因果的曲線が } U \text{ と交わる}\}.$$

---

*21)　分かりにくい用語なので，直感的なイメージを説明しておく．曲線に端点がある場合には，それに別の曲線を継ぎ足すことで延長することができる．従って，端点のない延長不可能な曲線とは，継ぎ足しようの無いどこまでも伸び続けている曲線のことである.

- <u>$D^-(U)$：U の**過去的依存領域** (past domain of dependence)：</u>

$$D^-(U) \equiv \{p \in \mathcal{M} \mid p \text{ を通る任意の未来に延長不可能な因果的曲線が } U \text{ と交わる }\}.$$

もし因果的曲線が過去的端点を持たなければ，$D^+(S)$ 内部での解の振る舞いは S 上のデータだけから決定されるという意味で，この概念は初期値問題を扱う際に重要である．

1.7.2 Cauchy 面と大域的双曲性

時空 $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ において，いかなる因果的曲線とも 1 回以上交わらない超曲面 Σ を部分 Cauchy 面と呼ぶ．とくに，部分 Cauchy 面 Σ が

$$D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma) = \mathcal{M} \tag{1.244}$$

を満たすとき，Σ を **Cauchy 面** (Cauchy surface) と呼ぶ．

物理的には，Cauchy 面は，時空 $\mathcal{M}$ における時刻一定面を表す．時空 $\mathcal{M}$ が Cauchy 面を持つとき，$\mathcal{M}$ は**大域的に双曲** (globally hyperbolic) であるという．大域的に双曲な時空では，初期条件を Cauchy 面上で必要な数だけ与えることで，時空全体における力学変数の振る舞いを完全に決定できる．

また，大域的に双曲な時空では，関数 $t: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ で，$n_\mu \, \mathrm{d}x^\mu = -\mathrm{d}t$ が未来方向の時間的ベクトルになり，かつ，t 一定面が Cauchy 面になるものが存在することが示される [1]．さらに，t の値を変えることで得られる様々な Cauchy 面（法ベクトルは n^μ）は，いずれも同じトポロジー Σ を持ち，時空のトポロジーは $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$ となる．従って，大域的に双曲な時空では，時空全体で t を時間関数とする ADM 分解が行える．

もし $\mathcal{M}$ が大域的に双曲でなければ，$D^+(\Sigma)$ または $D^-(\Sigma)$ は未来または過去 **Cauchy ホライズン**とよばれるヌル超曲面を $\mathcal{M}$ の中に持つ．この場合には，未来 Cauchy ホライズンの外部での双曲型微分方程式の解の振る舞いは Σ 上の初期値だけでは決定されない．

1.7.3 ブラックホールとイベントホライズン

漸近的平坦な時空 $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ において，ブラックホール領域 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{M} \backslash J^-(\mathcal{I}^+) \tag{1.245}$$

で定義する．これは，未来ヌル無限遠 $\mathcal{I}^+$ へとつながる因果的曲線が存在しない領域である．漸近的平坦でなくても，漸近的反 de Sitter 時空のように漸近的領域がうまく定義されているときは同様の定義ができる．そして，**未来イベントホライズン** (future event horizon) $\mathcal{H}^+$ は $J^-(\mathcal{I}^+)$ の境界として定義される：

$$\mathcal{H}^+ = \dot{J}^-(\mathcal{I}^+)\,. \tag{1.246}$$

ここで，$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ のドットは境界を表す記号である．

ブラックホールの未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ は以下の重要な性質を持つ*22)：

性質 (1)：$\mathcal{H}^+$ 上のどの 2 点も時間的に離れていない．この性質は，しばしばホライズンの非時間性 (achronicity property) と呼ばれる．近接した 2 点に関してはホライズンのヌル性から自明だが，大域的には非自明である．

性質 (2) [Penrose (1968) [11]]：$\dot{J}^-(\mathcal{I}^+)$ は未来的端点を持たないヌル測地線から生成される．また，ヌル測地線はコースティックを通って $J^-(\mathcal{I}^+)$ から $\mathcal{H}^+$ に一度入り込むと，その後は決して $\mathcal{H}^+$ から離れることはできず，$\mathcal{H}^+$ 上の他のヌル測地線と交わることもできない．

性質 (3) [Hawking (1972) [6], [12]]：4 次元漸近的平坦な定常時空のイベントホライズンは Killing ホライズンである．さらにブラックホールが回転していれば*23)，時空は軸対称性も持つ．この性質を定常ブラックホールの**剛性** (rigidity) という．

1.8 Kerr–Newman 解

最後に，他のブラックホール解として，Einstein–Maxwell 理論の定常真空解である Kerr–Newman 解について説明する．Kerr–Newman 解は，Boyer–Lindquist 座標 (t, r, θ, φ) を用いて次のように書ける：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\Big(\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\Big)\mathrm{d}t^2 - \frac{2\,a\sin^2\theta\,(r^2+a^2-\Delta)}{\Sigma}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi \\ &+ \frac{(r^2+a^2)^2 - \Delta\,a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\,\mathrm{d}\theta^2\,,\end{aligned} \tag{1.247}$$

$$A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = -\frac{\bar{Q}\,r}{\Sigma}\left(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi\right) \qquad (\bar{Q} \equiv Q/4\pi)\,. \tag{1.248}$$

ここで

$$a \equiv J/M\,, \quad \Delta \equiv r^2 - 2GM\,r + a^2 + G\,\bar{Q}^2\,, \quad \Sigma \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta\,, \tag{1.249}$$

である．計量の行列式は $\det(g_{\mu\nu}) = -\Sigma^2\sin^2\theta$ であり，計量とその逆を行列で表すと次を得る：

---

*22) 証明については，[2], [7] が分かりやすい．

*23) 時間発展を生成する Killing ベクトル $\mathrm{t} = \partial_t$ がホライズン上で空間的になるとき，ブラックホールは回転しているという．

$$
(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{a(r^2+a^2-\Delta)\sin^2\theta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -\frac{a(r^2+a^2-\Delta)\sin^2\theta}{\Sigma} & 0 & 0 & \frac{\left[(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta\right]\sin^2\theta}{\Sigma} \end{pmatrix}, \tag{1.250}
$$

$$
(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}{\Delta\Sigma} & 0 & 0 & -\frac{a(r^2+a^2-\Delta)}{\Delta\Sigma} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{a(r^2+a^2-\Delta)}{\Delta\Sigma} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Delta\Sigma\sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{1.251}
$$

この解は，$a = 0 = \bar{Q}$ とすると Schwarzschild 解，$a = 0$ とすると Reissner–Nordström 解，$\bar{Q} = 0$ のときには Kerr 解に一致する．また，$g^{rr} = 0$，つまり，$\Delta(r) = 0$ の解を

$$
r_\pm \equiv GM \pm \sqrt{(GM)^2 - a^2 - \bar{Q}^2} \tag{1.252}
$$

とするとき，Kerr–Newman 解のホライズンは $r = r_+$ の面にある．$r_\pm$ が実数である（ホライズンが存在する）条件は $a^2 + G\bar{Q}^2 \leq (GM)^2$ であり，とくに，等号 $a^2 + G\bar{Q}^2 = (GM)^2$ が成り立つときのものは**極大ブラックホール** (extremal black hole) と呼ばれる．

Kerr–Newman 解は，$r = 0$ の場所に曲率が発散する特異点を持つ．$r_\pm$ が実数である場合には，この特異点はホライズンの内部に隠されているため，ホライズン外部の観測者は特異点を観測しないが，$r_\pm$ が虚数の場合には，$g^{rr} = 0$ となるホライズンが存在せず，遠方の観測者が特異点を観測できてしまう．このような特異点は裸の特異点と呼ばれ，そこでは曲率が発散するため低エネルギー有効理論としての Einstein 重力理論の適用範囲を超えてしまう．通常の物理的なプロセスでは，このような裸の特異点は現れないため，裸の特異点を持たない時空のみが物理的な時空であると仮定する（宇宙検閲仮説）．

第 2 章
エントロピーと相対論的連続体力学

本章では，エントロピーと局所熱平衡仮説に基づいた非平衡熱力学を復習し，相対論的連続体力学の定式化を行う．ここでの目的は，ダイナミクスの決定におけるエントロピーの役割を理解することと，さらには，相対論的な定式化では計量 $g_{\mu\nu}$ を熱力学変数として考えることが自然であることを確認することである．

2.1 平衡熱力学

熱力学の立場では，エネルギーや粒子数や体積といった，少数の熱力学変数を用いて系の巨視的な状態を特徴づける．以下では，これらの熱力学変数をまとめて $a = (a^r)$ $(r = 1, \ldots, k)$ と記す．例えば，熱力学変数がエネルギー E と粒子数 N と系の体積 V の場合には，$(a^r) = (E, N, V)$ である．

閉じた系を，系が持つ典型的な緩和時間よりも十分長く観測すると，系は平衡状態に達する．**熱力学第二法則**から閉じた系のエントロピーは減少せず，平衡状態は「与えられたパラメーター $a = (a^r)$ に対してエントロピーが最大のときの状態」として特徴づけることができる．すると，平衡状態での（最大化された）エントロピーの値は熱力学変数 $a = (a^r)$ のみの関数として書けるはずである:

$$S = S(a)\,. \tag{2.1}$$

この関係式は**熱力学の基本関係式**と呼ばれ，その変分

$$\mathrm{d}S = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial S(a)}{\partial a^r}\,\mathrm{d}a^r \tag{2.2}$$

を **Gibbs の関係式**と呼ぶ．とくに，熱力学変数としてエネルギー E が含まれている場合には

$$\mathrm{d}S = \frac{\partial S(a)}{\partial E}\,\mathrm{d}E + \sum_{r=2}^{k} \frac{\partial S(a)}{\partial a^r}\,\mathrm{d}a^r \tag{2.3}$$

となり，系の温度 T をこの展開の係数を用いて定義する:

$$\frac{1}{T} \equiv \frac{\partial S(a)}{\partial E}\,. \tag{2.4}$$

2.2 非平衡熱力学

2.2.1 局所熱平衡仮説

体積 V の系を系の緩和時間よりも短い時間で観測した場合には，系を熱平衡状態にあるものとして扱うことはできず，前節で述べた平衡熱力学の手法を用いることができない．しかしながら，系を小さな空間的領域（**部分系**という）の集合とみなすと，各部分系については平衡熱力学の手法を用いることができる [13]．

このことを見るため，系を体積 $v = \epsilon_{\mathrm{s}}^{d-1}$ の部分系に分割してみよう．もし系の相互作用が空間・時間両方について十分局所的であり，かつ部分系のサイズを（系に比べれば十分小さいが）十分巨視的なものに取っておけば，隣接した他の部分系からの影響はほとんど無視することができ，各部分系を孤立系として扱うことができる．なお，十分時間がたつと，隣接する部分系からの影響が蓄積して無視できなくなり，部分系を孤立系とみなすことができなくなる．こうして，部分系の緩和時間よりも十分長く，かつ隣接した他の部分系からの影響が効いてくる時間よりも十分短い時間間隔で時間平均をとれば（その時間の目安を ϵ_{t} とおく），各部分系は熱平衡状態にあるものとして扱えるはずである．この仮定を**局所熱平衡仮説**といい，局所熱平衡にある部分系のことを**物質粒子**（流体力学のときは**流体粒子**）と呼び，それを空間座標 $\boldsymbol{x}$ でラベルすることにする．今後，時空点 $x = (\boldsymbol{x}, t)$ における物理量というときは，その物理量はすでに幅 $(\epsilon_{\mathrm{s}}, \epsilon_{\mathrm{t}})$ で平均化されているものとする．

上の了解のもとで，時刻 t における部分系 $\boldsymbol{x}$ の熱力学量を $a(\boldsymbol{x}, t)$ と書こう．すると，局所熱平衡仮説より，そのエントロピー $s(\boldsymbol{x}, t)$ は $a(\boldsymbol{x}, t)$ を固定したもとで最大化されており，基本関係式は

$$s(\boldsymbol{x}, t) = s\big(a(\boldsymbol{x},t)\big)\,,\ \text{つまり，}\quad s(x) = s\big(a(x)\big) \tag{2.5}$$

と書くことができる．これが，部分系が熱平衡状態にあるということの数学的表現である．

2.2.2 非平衡状態の平衡状態への緩和

上で述べたことの例として，物理量が内部エネルギー密度 e のみの場合，つ

まり，$a(\boldsymbol{x}, t) = e(\boldsymbol{x}, t)$ という非相対論的な場合を考えてみよう（非相対論的極限では e は保存量であることに注意せよ）．すると，上の局所熱平衡の式は,

$$s(\boldsymbol{x}, t) = s\big(e(\boldsymbol{x}, t)\big) \tag{2.6}$$

と表され，全系のエントロピー $\hat{S}$ は

$$\hat{S}\big[e(\boldsymbol{x},t);\, E\big] = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, s(\boldsymbol{x}, t) = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, s\big(e(\boldsymbol{x}, t)\big) \tag{2.7}$$

と書ける．ここで，左辺に現れた E は全エネルギーである：

$$E = \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, e(\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{2.8}$$

物質粒子たちは,（全エネルギー E を一定に保ちながら）全エントロピー $\hat{S}$ が増大するようにエネルギーを交換し，大域的熱平衡状態に向かって時間発展する.

この大域的熱平衡状態は，Lagrange 未定乗数 β を用いれば，次を最大化する状態として求めることができる（熱平衡状態は時間によらないため，以下 t を省略する）：

$$\tilde{S}[e(\boldsymbol{x}),\, \beta;\, E] \equiv \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, s\big(e(\boldsymbol{x})\big) - \beta\left(\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, e(\boldsymbol{x}) - E\right). \tag{2.9}$$

まず，β で変分したものは拘束条件 (2.8) を与え，一方，$e(\boldsymbol{x})$ で変分したものは次の式を与える：

$$0 = \frac{\mathrm{d}s\big(e(\boldsymbol{x})\big)}{\mathrm{d}e(\boldsymbol{x})} - \beta = \frac{1}{T(\boldsymbol{x})} - \beta\,. \tag{2.10}$$

この (2.8) と (2.10) の 2 式の解を添え字 0 を付けて表せば，大域的熱平衡における内部エネルギー密度 $e_0(\boldsymbol{x}; E)$ は

$$\left.\frac{\mathrm{d}s\big(e(\boldsymbol{x})\big)}{\mathrm{d}e(\boldsymbol{x})}\right|_0 = \frac{1}{T_0(\boldsymbol{x})} = \beta_0 \quad (\boldsymbol{x}\text{ によらない定数}) \tag{2.11}$$

で表され，このことから，大域的熱平衡では温度は場所によらず一定であることが分かる．また，最大値を与えるエントロピーを $S_0(E) \equiv \tilde{S}[e_0(\boldsymbol{x};E);\, \beta_0\,; E]$ と置けば,

$$\frac{\mathrm{d}S_0(E)}{\mathrm{d}E} = \beta_0 \tag{2.12}$$

が成り立つことが分かる．つまり，熱平衡状態における各点の局所的温度は，全体系の基本関係式から定まる温度と一致する*1).

逆に，$1/T(\boldsymbol{x},t)$ に勾配がある場合には，系は大域的熱平衡ではありえず，勾配に比例した熱流が流れて大域的熱平衡に向かうはずである：

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{const.}\, \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right). \tag{2.13}$$

*1) 全く同様にして，**保存量** C^I **の熱力学的共役量** $\partial S/\partial C^I$ **は，大域的熱平衡では場所に依らず一定である**ことが示せる．このことは，**熱力学第ゼロ法則**と呼ばれる.

なお，エネルギーの保存から $\boldsymbol{q}$ は次の連続の方程式を満たす：

$$\dot{e} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{q} = 0\,. \tag{2.14}$$

しかしながら，この式だけからは，この熱流の発生が全エントロピーを増大させるためであることがなかなか見えない．これは，次のようにして解決できる*2)．

まず，非平衡状態の $\hat{S}$ と大域的熱平衡状態での最大値 $\hat{S}_0$ との差は，空間微分展開を行えば，必ず次の形のはずである：

$$\Delta\hat{S} \equiv \hat{S} - \hat{S}_0 \propto -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}e}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}e}\right). \tag{2.15}$$

一方，後述する非平衡熱力学における Onsager の線形回帰理論を用いると，単位時間当たりのエネルギー散逸は $\delta\Delta\hat{S}/\delta e$ に比例する：

$$\dot{e} = \mathrm{const.}\,\frac{\delta\Delta\hat{S}}{\delta e} \sim \mathrm{const.}\,\boldsymbol{\nabla}^2\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}e}\right) \sim \mathrm{const.}\,\boldsymbol{\nabla}^2\left(\frac{1}{T}\right). \tag{2.16}$$

これは，(2.14) の連続の方程式そのものである．

以上の議論を一般化することで，（相対論的）流体力学をエントロピーに基づいて再構成することができる．これを示す前に，まず，相対論的流体力学の通常の議論を復習し，その後で Onsager の線形回帰理論を用いた議論を紹介する．

2.3 相対論的流体力学

2.3.1 流体力学における局所熱平衡仮説

以下では，d 次元の曲がった時空上の等方的な 1 成分流体*3) を考える．このとき，保存カレントとしては，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ と粒子数カレント n^μ がある．

まず，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}(x)$ が時間的な固有ベクトル $u^\mu(x)$ を持つと仮定し，その固有値として**固有エネルギー密度** $e(x)$ を定義する*4)：

$$T^\mu{}_\nu(x)\, u^\nu(x) = -e(x)\, u^\mu(x)\,. \tag{2.17}$$

さらに，u^μ を $u^\mu u_\mu = -1$ と規格化し，**エネルギー運動量ベクトル場** $p_\mu(x)$ を

$$p_\mu(x) \equiv e(x)\, u_\mu(x) = -T_\mu{}^\nu(x)\, u_\nu(x) \tag{2.18}$$

で定義する．以下，ベクトル場 $u^\mu(x)$ を流体の**速度ベクトル場**と呼ぶ．このように，速度ベクトル場 $u^\mu(x)$ をエネルギー運動量テンソルの固有ベクトルとし

*2) 以下の議論は，[14] に基づく．
*3) 1 種類の保存電荷（粒子数と呼ぶ）を持つ流体．
*4) 本章では，添え字の上げ下げは常に $g_{\mu\nu}$ を用いて行うものとする．

て定義することを **Landau–Lifschitz フレーム**[15] をとるという*5).

ある時空点のまわりの局所座標系 $x=(t,\,x^i)$ において，計量と速度ベクトル場がそれぞれ $\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+h_{ij}(x)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$，$(u^\mu)=(1,0,\ldots,0)$ と表されるとき，この局所座標系を**流体の局所静止系**と呼ぶことにする．このとき，$T^{\mu\nu}$ の成分は

$$(T^{\mu\nu}(x))=\begin{pmatrix} e(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau^{ij}(x)\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

となり，τ^{ij} は応力を表す物理量である．これより，エネルギー運動量ベクトル場 $(p^\mu)=(e,0,\ldots,0)$ は，局所静止系におけるエネルギー運動量テンソルの $T^{0\mu}$ 成分としての意味を持つことが分かる．また，局所静止系における

$$(\tau^{\mu\nu}(x))=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau^{ij}(x)\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

をテンソルとして任意の座標系に拡張したものを**応力テンソル**と呼ぶ．一般に，

$$T^{\mu\nu}=e\,u^\mu\,u^\nu+\tau^{\mu\nu} \quad \bigl(\tau^{\mu\nu}=\tau^{\nu\mu}\,,\quad \tau^{\mu\nu}\,u_\nu=0\bigr) \tag{2.21}$$

と表されることに注意しよう．

一方，保存する粒子数カレント n^μ ($\nabla_\mu n^\mu=0$) については，スカラー量 $n(x)$ を局所静止系での粒子数密度として導入する：

$$n(x)\equiv -n^\mu(x)\,u_\mu(x)\,. \tag{2.22}$$

Landau–Lifschitz フレームでは粒子数カレント n^μ は u^μ に比例する必要はなく，局所静止系での成分は一般に $(n^\mu)=(n,\,\nu^i)$ となる．一般の座標系での n^μ は，**対流カレント** $n\,u^\mu$ と**拡散カレント** $\nu^\mu=(0,\,\nu^i)$ の和になっている：

$$n^\mu=n\,u^\mu+\nu^\mu \quad \bigl(\nu^\mu\,u_\mu=0\bigr)\,. \tag{2.23}$$

局所熱平衡の仮定の下では，等方的 1 成分流体の流体粒子の熱力学的状態は $e(x)$ と $n(x)$ で指定される．すなわち，基本関係式は次式で与えられる：

$$s(x)=s\bigl(e(x),\,n(x)\bigr). \tag{2.24}$$

ここで温度 $T(x)$ および化学ポテンシャル $\mu(x)$ を

$$\frac{1}{T(x)}\equiv\frac{\partial s}{\partial e}(x)\,,\qquad -\frac{\mu(x)}{T(x)}\equiv\frac{\partial s}{\partial n}(x) \tag{2.25}$$

で定義すれば，Gibbs の関係式は

---

*5) 速度ベクトル場の他の定義として，$u^\mu(x)$ を粒子数カレント $n^\mu(x)$ に比例する単位ベクトルとする Eckart のものがある[16]．Eckart フレームでは，速度ベクトル場は $T^\mu{}_\nu$ の固有ベクトルではないため，エネルギー運動量テンソルは一般に $T^{\mu\nu}=e\,u^\mu\,u^\nu+2\,q^{(\mu}\,u^{\nu)}+\tau^{\mu\nu}$ $(q^\mu\,u_\mu=0=\tau_{\mu\nu}\,u^\mu)$ と展開され，q^μ は熱流と呼ばれる．

$$\delta s(x) = \frac{1}{T(x)}\,\delta e(x) - \frac{\mu(x)}{T(x)}\,\delta n(x) \tag{2.26}$$

と書ける．

体積 V の空間的微小領域について，そのエントロピー，エネルギー，粒子数をそれぞれ，$S = s\,V$, $E = e\,V$, $N = n\,V$ と書けば，基本関係式は

$$S = V\,s\big(E/V,\,N/V\big) = S(E,\,N,\,V) \tag{2.27}$$

と書ける．このとき，圧力 P は，

$$\delta S = \frac{1}{T}\,\delta E - \frac{\mu}{T}\,\delta N + \frac{P}{T}\,\delta V \tag{2.28}$$

として導入される．圧力の具体形は，(2.26) と (2.27) と (2.28) から

$$P = T\,s + \mu\,n - e \tag{2.29}$$

と求まる．なお，この両辺の変分をとり，Gibbs の基本関係式を用いれば，

$$\delta P = s\,\delta T + n\,\delta\mu \tag{2.30}$$

という **Gibbs–Duhem の関係式**が得られる．

後で便利なように (1.110) で定義した

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu\,u_\nu \tag{2.31}$$

というテンソルを導入する．これは局所静止系では

$$(h_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \delta_i{}^j \end{pmatrix}, \qquad (h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

という成分を持つ空間的なテンソルであり，次の関係式を満たす：

$$h_\mu{}^\rho\,h_\rho{}^\nu = h_\mu{}^\nu\,, \qquad h_{\mu\nu}\,u^\nu = 0\,, \quad h_\mu{}^\mu = d-1\,. \tag{2.33}$$

応力テンソル $\tau^{\mu\nu}$ のうち，$p_\mu(x)$, $n(x)$ の（微分を含まない）局所関数として書ける部分を $\tau_0^{\mu\nu}$ と書き，残りを $\tau_{(\mathrm{d})}^{\mu\nu}$ と書くことにする*6)：

$$\tau^{\mu\nu} = \tau_0^{\mu\nu} + \tau_{(\mathrm{d})}^{\mu\nu}\,. \tag{2.34}$$

等方的な流体では，$\tau_0^{\mu\nu}$ は圧力 P を用いて一般に次のように書ける：

$$\tau_0^{\mu\nu} = P\,h^{\mu\nu}\,. \tag{2.35}$$

*6)　添え字 (d) は「散逸的 (dissipative)」を表す．

2.3.2 標準的な相対論的粘性流体力学

この小節では等方的な 1 成分粘性流体力学の基礎方程式の標準的な導出方法を紹介する．1 成分粘性流体力学の力学変数はエネルギー運動量ベクトル $p_\mu(x)$ と粒子数密度 $n(x)$ の $d+1$ 個で与えられ，これらの時間発展は次の $d+1$ 個の基礎方程式

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0\,, \tag{2.36}$$

$$\nabla_\mu n^\mu = 0\,, \tag{2.37}$$

で記述される．ここで，エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ と粒子数カレント n^μ は，それぞれ (2.21) および (2.23) で与えられる一般的なものであり，応力テンソル $\tau^{\mu\nu}$ および粒子数拡散のカレント ν^μ は具体的な形は指定していない．

いま，$\tau^{\mu\nu}(x)$ と $\nu^\mu(x)$ が $p_\mu(x)$ と $n(x)$ とそれらの有限階の空間微分 $(h_\mu{}^\nu\,\nabla_\nu)$，そして，計量 $g_{\mu\nu}(x)$ のみの関数として書けることを仮定する：

$$\tau^{\mu\nu}(x) = \tau^{\mu\nu}(p_\mu,\, h_\mu{}^\rho\,\nabla_\rho p_\nu,\, \cdots,\, n,\, h_\mu{}^\nu\,\partial_\nu n,\, \cdots,\, g_{\mu\nu})\,, \tag{2.38}$$

$$\nu^\mu(x) = \nu^\mu(p_\mu,\, h_\mu{}^\rho\,\nabla_\rho p_\nu,\, \cdots,\, n,\, h_\mu{}^\nu\,\partial_\nu n, \cdots,\, g_{\mu\nu})\,. \tag{2.39}$$

これにより，力学変数 $p_\mu(x)$ と $n(x)$ の時間発展を具体的に追うことができるようになる．(2.38) および (2.39) は**構成方程式**と呼ばれ，この関数の決め方で流体の性質が決まる．

エネルギー運動量テンソルの保存式 (2.36) の物理的意味は，$\nabla_\nu T^{\mu\nu}=0$ を u^μ について直交する成分と平行な成分に分離すると分かりやすい．

直交成分（Euler 方程式）

保存式 $\nabla_\rho T^{\nu\rho}=0$ を $h^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + u^\mu\,u_\nu$ と縮約すれば，次の式が得られる：

$$e\,a^\mu = -h^\mu{}_\nu\,\nabla_\rho \tau^{\nu\rho} \quad \bigl(a^\mu \equiv u^\nu\,\nabla_\nu u^\mu\bigr)\,. \tag{2.40}$$

a^μ は流体粒子の加速度を表すので，これは流体粒子の運動方程式に他ならない．またこの式より，$\tau^{\mu\nu}$ が確かに応力テンソルを表していることが分かる．

平行成分（熱力学第一法則）

保存則 $0=\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu\bigl(e\,u^\mu\,u^\nu + \tau^{\mu\nu}\bigr)$ を u_ν と縮約することにより，

$$\nabla_\mu\bigl(e\,u^\mu\bigr) = u_\nu\,\nabla_\mu \tau^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\,\tau^{\mu\nu}\,\pounds_u h_{\mu\nu} \tag{2.41}$$

を得る．これは「流体粒子のエネルギー変化率*7)＝応力から受ける仕事率」というエネルギー保存則，つまり，**熱力学第一法則**を表す．熱力学第一法則に熱流の項が現れていないのは，Landau–Lifschitz フレームをとっているためである．

次に，エントロピーの時間発展を調べよう．(2.26) の変分を時間微分 $\delta =$

*7) $\nabla_\mu\bigl(e\,u^\mu\bigr)$ には，エネルギー密度 e の時間変化 $u^\mu\,\partial_\mu e$ と，体積膨張 $\nabla_\mu u^\mu$ に伴うエネルギー変化 $e\,\nabla_\mu u^\mu$ の両方が含まれている．

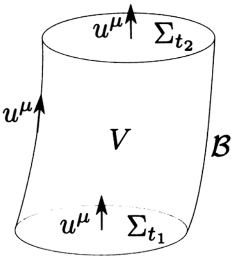


図 2.1　流体粒子の軌跡.

$u^\mu \nabla_\mu$ に置き換えれば次が得られる：

$$u^\mu \nabla_\mu s = \frac{1}{T} u^\mu \nabla_\mu e - \frac{\mu}{T} u^\mu \nabla_\mu n \,. \tag{2.42}$$

この式の両辺に $s \nabla_\mu u^\mu = (1/T)\,(e+P)\,\nabla_\mu u^\mu - (\mu/T)\,n\,\nabla_\mu u^\mu$ を加えると

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(s\,u^\mu) &= \frac{1}{T}\nabla_\mu(e\,u^\mu) - \frac{\mu}{T}\nabla_\mu(n\,u^\mu) + \frac{P}{T}\nabla_\mu u^\mu \\ &= \frac{1}{T} u_\nu \nabla_\mu \tau^{\mu\nu} + \frac{\mu}{T}\nabla_\mu \nu^\mu + \frac{P}{T}\nabla_\mu u^\mu \\ &= -\frac{1}{T}\nabla_\mu u_\nu \left(\tau^{\mu\nu} - P\,h^{\mu\nu}\right) + \nu^\mu \nabla_\mu\left(-\frac{\mu}{T}\right) + \nabla_\mu\left(\frac{\mu}{T}\,\nu^\mu\right)\end{aligned} \tag{2.43}$$

を得る．ここでカレント保存則 (2.41), (2.37) を用いた．(2.43) の各項の意味を理解するため，図 2.1 のような，時刻 t_1 から t_2 $(t_2 > t_1)$ へと時間発展する，ある流体粒子の軌跡を考えよう．ここで，流体粒子の時間発展は速度ベクトル u^μ で与えられるため，u^μ は側面の時間的超曲面 $\mathcal{B}$ の接ベクトルである．この円筒内部 V で (2.43) の両辺を積分すると，Gauss の発散定理 (A.32) から，

$$\begin{aligned}&\int_{\Sigma_{t_2}} \mathrm{d}S[u]\,s - \int_{\Sigma_{t_1}} \mathrm{d}S[u]\,s = \int_V \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\nabla_\mu(s\,u^\mu) \\ &= \int_V \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{T}\nabla_\mu u_\nu\left(\tau^{\mu\nu} - P\,h^{\mu\nu}\right) + \nu^\mu \nabla_\mu\left(-\frac{\mu}{T}\right)\right] \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}} \mathrm{d}S_\mu \frac{\mu}{T}\nu^\mu\end{aligned} \tag{2.44}$$

を得る．1 行目の左辺は，流体粒子の持つエントロピーの変化であり，2 行目は各時空点におけるエントロピー生成率を積分したもの，3 行目は流体粒子の境界を通じた隣り合う流体粒子とのエントロピーの交換を表す．

(2.43) の各項の意味がわかったので，(2.43) の最後のエントロピーの交換を表す全微分項を左辺に移項し，エントロピーカレントを $s^\mu \equiv s\,u^\mu + (-\mu/T)\,\nu^\mu$ で定義する．すると，エントロピー生成率は次のように求まる：

$$\nabla_\mu s^\mu = -\frac{1}{T}\nabla_\mu u^\mu \left(\frac{\mathrm{tr}\,\tau}{d-1} - P\right) - \frac{1}{T}\nabla_{\langle\mu} u_{\nu\rangle}\,\tau^{\langle\mu\nu\rangle} + \nu^\mu\,\partial_\mu\left(-\frac{\mu}{T}\right). \tag{2.45}$$

ここで $\langle\ \rangle$ の記号は，任意の 2 階テンソル $A^{\mu\nu}$ に対して，対称トレースレス部分を抜き出し空間方向に射影する演算である：

$$A^{\langle\mu\nu\rangle} \equiv h^{\mu}{}_{\rho}\, h^{\nu}{}_{\sigma} \left(A^{(\rho\sigma)} - \frac{h_{\alpha\beta}\, A^{\alpha\beta}}{d-1}\, h^{\rho\sigma} \right). \tag{2.46}$$

熱力学第二法則から (2.45) 左辺は負になれないため，右辺の全ての項が独立に非負であることを課すことで，微分展開の 1 次まででで構成方程式が次のように求まる：

$$\mathrm{tr}\,\tau = (d-1)\left(P - \zeta\, \nabla_{\mu} u^{\mu}\right), \quad \tau^{\langle\mu\nu\rangle} = -2\eta\, \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle}, \tag{2.47}$$

$$\nu^{\mu} = \sigma\, h^{\mu\nu}\, \partial_{\nu}\Big(-\frac{\mu}{T}\Big). \tag{2.48}$$

ここで ζ, η および σ は負でない定数であり，ν^{μ} は空間的なベクトルなので射影 $h^{\mu\nu}$ が施されている．

以上のように求まったカレント

$$T^{\mu\nu} = e\, u^{\mu}\, u^{\nu} + P\, h^{\mu\nu} - 2\eta\, \sigma^{\mu\nu} - \zeta\, \theta\, h^{\mu\nu}, \tag{2.49}$$

$$n^{\mu} = n\, u^{\mu} + \sigma\, h^{\mu\nu}\, \partial_{\nu}\Big(-\frac{\mu}{T}\Big) \qquad \big(\sigma^{\mu\nu} \equiv \nabla^{\langle\mu} u^{\nu\rangle}, \quad \theta \equiv \nabla_{\mu} u^{\mu}\big) \tag{2.50}$$

をカレント保存則

$$\nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0, \quad \nabla_{\mu} n^{\mu} = 0, \tag{2.51}$$

に代入したものは，しばしば**相対論的 Navier–Stokes 方程式**と呼ばれ，とくに，その Euler 方程式の部分 $h^{\rho}{}_{\mu} \nabla_{\nu} T^{\mu\nu} = 0$ は，非相対論極限をとった後，よく知られた Navier–Stokes 方程式に帰着する．ここで，η は**ずり粘性率** (shear viscosity)，η は**体積粘性率** (bulk viscosity)，また σ は**拡散係数** (diffusion constant) に対応する．

2.4 相対論的流体力学のエントロピーに基づく定式化

前節では，各流体粒子のエントロピー生成率が非負になるという条件から構成方程式を決めるという形で流体力学の定式化を行った．本節では，この結果をエントロピーに基づいた非平衡熱力学の枠組みから再導出する*8)．そのための準備として，まず，標準的な Onsager の線形回帰理論 [17]~[19] を説明する（標準的なテキストとしては [13], [20] などがある）．

*8) 文献 [14] に基づく．最終結果は，(2.116), (2.117) および(2.129)–(2.132) である．

2.4.1 Onsager の線形回帰理論

ある閉じた系が平衡状態にあるとき，熱力学変数 $a = (a^r)$ $(r = 1, \ldots, N)$ は十分良い精度で平衡での値 $a_0 = (a_0^r)$ をとる．しかし，現実には系は常に揺らいでおり，平衡での値からずれている．熱力学的なアプローチでは，このようなずれは確率的にしか記述できないため，以下では熱力学変数の確率分布を導入する．

熱力学変数 $a = (a^r)$ の確率密度関数を $W(a)$ と記すことにする．すなわち，変数 a が a から $a + \mathrm{d}a$ の間に値をとる確率が $W(a)\,\mathrm{d}^N a$ で与えられるとする．この関数 $W(a)$ が系のエントロピー $S(a)$ を用いて

$$W(a) = \text{const.} \times \mathrm{e}^{S(a)} \tag{2.52}$$

と表されるというのが **Boltzmann–Einstein の原理**である．a_0 の定義から，エントロピー $S(a)$ は $a = a_0$ で最大値をとるので，平衡からのずれが十分小さい場合には，エントロピーは次のような二次形式で近似することができる：

$$S(a) = S(a_0) - \frac{1}{2}\,(a - a_0)^r\,\beta_{rs}\,(a - a_0)^s\,. \tag{2.53}$$

ここで，β_{rs} は対称行列で，エントロピーの凸性から正定値でなければならない．平衡での値を $S_0 \equiv S(a_0)$ と記し，そこからのずれを $\Delta S(a)$ と書けば，

$$\Delta S(a) \equiv -\frac{1}{2}\,(a - a_0)^r\,\beta_{rs}\,(a - a_0)^s \tag{2.54}$$

である．この近似式を用いると，確率分布は次の Gauss 分布で与えられる：

$$W(a) = \text{const.} \times \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(a-a_0)^r\,\beta_{rs}\,(a-a_0)^s}\,. \tag{2.55}$$

確率分布の規格化条件 $\int \mathrm{d}^N a\, W(a) = 1$ より，係数は

$$W(a) = \sqrt{\frac{\det\bigl(\beta_{rs}\bigr)}{(2\pi)^N}}\;\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,(a-a_0)^r\,\beta_{rs}\,(a-a_0)^s} \tag{2.56}$$

と決まる．熱力学変数 a^r に共役な**熱力学力**を

$$f_r \equiv \frac{\partial \Delta S}{\partial a^r} = -\beta_{rs}\,(a - a_0)^s \tag{2.57}$$

で定義すると，恒等式

$$0 = \int \mathrm{d}^N a\,\frac{\partial}{\partial a^s}\left[(a - a_0)^r\,\mathrm{e}^{\Delta S}\right] \tag{2.58}$$

から次を得る：

$$\bigl\langle (a - a_0)^r\, f_s \bigr\rangle = -\delta^r_s\,. \tag{2.59}$$

ここで，a の関数 $O(a)$ の期待値を $\bigl\langle O(a) \bigr\rangle \equiv \int \mathrm{d}^N a\, O(a)\, W(a)$ で定義した．また，熱力学変数 a^r の共分散 Δ^{rs} は次で与えられる：

$$\Delta^{rs} \equiv \bigl\langle (a - a_0)^r\,(a - a_0)^s \bigr\rangle = (\beta^{-1})^{rs}\,. \tag{2.60}$$

熱力学変数の時間発展

熱力学変数の時刻 t における瞬間的な値を $a(t) = \bigl(a^r(t)\bigr)$ と記すことにする．いま閉じた系を考えているので，平衡状態での平均値は時間に依存せず $\bigl[\langle a_0^r(t)\rangle = a_0^r\bigr]$，そこからの $a^r(t)$ のずれを $\delta a^r(t) \equiv a^r(t) - a_0^r$ と記す．異なる時刻でのずれ $\delta a^r(t)$ と $\delta a^s(t')$ の相関は，相関関数

$$\phi^{rs}(t-t') = \bigl\langle \delta a^r(t)\, \delta a^s(t')\bigr\rangle\,, \tag{2.61}$$

で与えられる．以下，アンサンブル平均と時間平均を同一視する[13]．つまり，統計力学的アンサンブルを作り出すのに十分な時間間隔 Δt を導入し，アンサンブル平均を時間平均で定義する：

$$\begin{aligned}\bigl\langle \delta a^r(t)\, \delta a^s(t')\bigr\rangle &\equiv \frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \mathrm{d}s\, \delta a^r(t+s)\, \delta a^s(t'+s)\\ &= \frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \mathrm{d}s\, \delta a^r(t-t'+s)\, \delta a^s(s)\,.\end{aligned} \tag{2.62}$$

最後の等号では，平衡状態での時間並進不変性を用いた．(2.61) の右辺における $\delta a^r(t)$ と $\delta a^s(t')$ の入れ替えの対称性から，次が示される：

$$\phi^{rs}(t) = \bigl\langle \delta a^r(t)\, \delta a^s(0)\bigr\rangle = \bigl\langle \delta a^s(0)\, \delta a^r(t)\bigr\rangle = \phi^{sr}(-t)\,. \tag{2.63}$$

さらに，平衡状態の時間反転不変性も仮定すると，時間反転で $\mathcal{T}\, a^r(t)\, \mathcal{T}^{-1} = (-1)^{|a^r|}\, a^r(-t)$ のように変換する熱力学変数に対して次の関係が成り立つ：

$$\begin{aligned}\phi^{rs}(t) &= \bigl\langle \mathcal{T}\, \delta a^r(t)\, \mathcal{T}^{-1}\, \mathcal{T}\, \delta a^s(0)\, \mathcal{T}^{-1}\bigr\rangle = (-1)^{|a^r|+|a^s|}\bigl\langle \delta a^r(-t)\, \delta a^s(0)\bigr\rangle\\ &= (-1)^{|a^r|+|a^s|}\, \bigl\langle \delta a^s(0)\, \delta a^r(-t)\bigr\rangle = (-1)^{|a^r|+|a^s|}\, \phi^{sr}(t)\,.\end{aligned} \tag{2.64}$$

以下では，変数 a^r と a^s が時間反転のもとで異なる変換をする場合には $\beta_{rs} = 0$ であることを仮定して議論を進める．

熱力学第二法則から，系の全エントロピーは減少しない．とくに，エントロピーを一定に保つ過程を可逆過程，増大させる過程を不可逆過程と呼ぶ．これに対応して，熱力学変数 a^r の時間発展が，可逆部分と不可逆部分の和の形に書けると仮定する：

$$\dot{a}^r = [\dot{a}^r]_{\mathrm{rev}} + [\dot{a}^r]_{\mathrm{irr}}\,. \tag{2.65}$$

以下では，不可逆な時間発展 $[\dot{a}^r]_{\mathrm{irr}}$ を決定する Onsager の線形回帰理論を説明する．ここでは，簡単のため $[\dot{a}^r]_{\mathrm{rev}} = 0$ を仮定して議論するが，次節では $[\dot{a}^r]_{\mathrm{rev}}$ の部分も議論する．

熱平衡状態にある閉じた系に対し，ある時刻 t で擾乱を加えたとする．ここで，a^r のずれ δa^r が標準偏差 Δa^r よりも大きいことを仮定する．この系はある緩和時間 τ の後に元の平衡状態へと緩和するが，その過程で δa^r の平均値は時間と

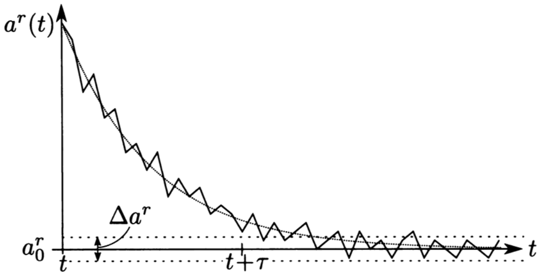


図 2.2 熱力学変数 a^r の緩和過程のイメージ図．τ は緩和時間である．

ともに減衰する（図 2.2）．具体的に，δa^r が（Δa^r よりは大きいが）十分小さければ，δa^r の平均値は一般に微分方程式 $\delta\dot{a}^r(t) = -\gamma^r_{\ s}\,\delta a^s(t)$ に従って指数関数的に減衰する．ここで，行列 $\gamma = (\gamma^r_{\ s})$ の固有値（正と仮定する）は，緩和時間の逆数と解釈できる．以下では，この γ から作られる行列 $L^{rs} \equiv \gamma^r_{\ t}\,(\beta^{-1})^{ts}$ の対称性を決める Onsager の相反関係を導く[13]．

今，局所熱平衡が実現されるくらいの長さの時間間隔 Δt で時間平均をとる．つまりこの Δt は，図 2.2 にあるような短時間のゆらぎの時間スケールよりは長いが，緩和時間 τ よりは十分短いとする．このとき，「$a = (a^r)$ が時刻 t において定まった値 $a(t) = \bigl(a^r(t)\bigr)$ をとるという条件の下で，$a = (a^r)$ が時刻 $t + \Delta t$ でとる値の条件付き期待値」を $\bigl\langle a^r(t + \Delta t)\bigr\rangle_{a(t)}$ と記すことにすると，Onsager の線形回帰仮説は次の形に書き下すことができる：

$$\frac{\bigl\langle a^r(t + \Delta t)\bigr\rangle_{a(t)} - a^r(t)}{\Delta t} = -\gamma^r_{\ s}\,(a - a_0)^s(t) + \mathcal{O}(\Delta t)\,. \tag{2.66}$$

ここで仮定していることは，$a^r(t)$ の値が a^r_0 へと緩和し，たとえ $(a - a_0)^r(t)$ が Δa^r より小さくなったとしても，時間間隔 Δt で時間平均をとった期待値 $\bigl\langle a^r(t + \Delta t)\bigr\rangle_{a(t)}$ の値は，上の微分方程式に現れたものと同じ行列 $\gamma^r_{\ s}$ を用いた式に従って減衰するということである．熱力学力 $f_r = -\beta_{rs}\,(a - a_0)^s$ と行列 $L^{rs} \equiv \gamma^r_{\ t}(\beta^{-1})^{ts}$ を用いると，この方程式は

$$\frac{\bigl\langle a^r(t + \Delta t)\bigr\rangle_{a(t)} - a^r(t)}{\Delta t} = L^{rs}\,f_s(t) + \mathcal{O}(\Delta t) \tag{2.67}$$

とも書ける．この式から

$$\begin{aligned}\Bigl\langle\Bigl(\bigl\langle a^r(t + \Delta t)\bigr\rangle_{a(t)} - a^r(t)\Bigr)\ a^s(t)\Bigr\rangle &= \Delta t\,L^{rt}\,\bigl\langle f_t(t)\,a^s(t)\bigr\rangle + \mathcal{O}(\Delta t^2)\\ &= -\Delta t\,L^{rs} + \mathcal{O}(\Delta t^2)\end{aligned} \tag{2.68}$$

を得る．ここで，上式の (外側の) 期待値 $\langle **\rangle$ は，時刻 t において $a(t) = \bigl(a^r(t)\bigr)$ が取りうる配位についての平均値である．左辺の第 1 項 $\Bigl\langle\bigl\langle a^r(t+\Delta t)\bigr\rangle_{a(t)}\,a^s(t)\Bigr\rangle$ は，条件を付けずに可能なすべての配位をとったときの $a^r(t + \Delta t)\,a^s(t)$ の期待値と同じになるから，これは，相関関数 $\phi^{rs}(\Delta t)$ そのものである．また，第 2 項は平衡状態における共分散 $(\beta^{-1})^{rs}$ に等しい．従って

$$\phi^{rs}(\Delta t) = (\beta^{-1})^{rs} - \Delta t\, L^{rs} \tag{2.69}$$

を得る．同様に次式が成り立つ：

$$\phi^{sr}(\Delta t) = (\beta^{-1})^{sr} - \Delta t\, L^{sr}\,. \tag{2.70}$$

すると，これらの式と (2.64) から，**輸送係数** L^{rs} が関係式

$$L^{rs} = (-1)^{|a^r|+|a^s|}\, L^{sr} \tag{2.71}$$

を満たすことが示される．この関係は **Onsager の相反関係**と呼ばれる*9)．この関係は，微視的理論の時間反転不変性［(2.64) を導く際に用いた］の帰結であることに注意しておこう．

以下では，熱力学変数を $a^r(t)$ と記すときには，常にこの変数が時間間隔 $[t-\Delta t/2, t+\Delta t/2]$ で平均化されていることを仮定し，Δt より長い時間スケールでの熱力学変数の時間発展のみを考える．このとき，条件付き期待値 $\langle a^r(t+\Delta t)\rangle_{a(t)}$ は $a^r(t+\Delta t)$ と同一視することができ，差 $\big[\langle a^r(t+\Delta t)\rangle_{a(t)} - a^r(t)\big]/\Delta t$ は時間微分 $\dot{a}^r(t)$ に置き換えられる．すると，(2.67) 式は

$$(\dot{a}-\dot{a}_0)^r(t) = [\dot{a}^r]_{\mathrm{irr}}(t) = L^{rs}\, f_s(t) = L^{rs}\,\frac{\partial \Delta S}{\partial a^s}(t) \tag{2.72}$$

と書くことができる．これがこの節で導きたかった巨視的方程式である．

巨視的方程式を用いると，エントロピー生成率は次のように計算できる：

$$\dot{S}(t) = \frac{\partial S}{\partial a^r}(t)\,\dot{a}^r(t) = f_r(t)\, L^{rs}\, f_s(t)\,. \tag{2.73}$$

以下では L^{rs} は正定値であると仮定し，このとき熱力学第二法則 $\dot{S}(t) \geq 0$ は自動的に満たされることになる．

2.4.2　幾何学的準備

前小節で説明した Onsager の線形回帰理論は，熱力学変数 a^r が空間座標の関数になっておらず，直ちには連続体力学に適用できない．一般共変な形にするため，本小節で，まず幾何学的な準備を行う．以下，これまでと同様，$\mathcal{M}$ を d 次元 Lorentz 多様体とし，$x=(x^\mu)$ $(\mu = 0,1,\ldots,d-1)$ をその座標とする．また，$\mathcal{M}$ の背景計量を

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu \tag{2.74}$$

とし，$\mathcal{M}$ 内にある連続体（流体など）の保存量密度を

$$p_\mu(x):\ \text{エネルギー運動量ベクトル} \tag{2.75}$$

*9)　磁場 $\boldsymbol{H}$ のように時間反転の下で $\boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H}$ と変化する外場がある場合には，相反関係は $L^{rs}(\boldsymbol{H}) = (-1)^{|a^r|+|a^s|}\, L^{sr}(-\boldsymbol{H})$ と表される．

$$n(x): \text{ 粒子数密度} \tag{2.76}$$

とおく．$p_\mu(x)$ が与えられると，それから固有エネルギー密度 $e(x)$ が

$$e(x) = \sqrt{-g^{\mu\nu}(x)\,p_\mu(x)\,p_\nu(x)} \tag{2.77}$$

と求まる．$e(x)$ は，静止質量密度と内部エネルギー密度の和に対応する量であるが，相対論では保存量密度ではないことに注意しよう．さらに，2.3.1 節と同様，Landau と Lifschitz に従い，速度ベクトル場 $u = u^\mu(x)\,\partial_\mu$ を

$$u^\mu(x) \equiv \frac{1}{e(x)}\,p^\mu(x) \quad \bigl[u^\mu(x)\,u_\mu(x) = -1\bigr], \tag{2.78}$$

として定義する．

熱力学を構成するためには，時刻一定面の族 $\{\Sigma_t\}$ を指定する必要がある．ここでは,「u^μ が常に Σ_t の法ベクトルとなる」ように $\{\Sigma_t\}$ をとることにする．Σ_t 上の外曲率テンソルは，(2.31) で導入した空間的テンソル $h_{\mu\nu}$ を用いて

$$K_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\pounds_u\,h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,h_\mu{}^\rho\,h_\nu{}^\sigma\,\bigl(\nabla_\rho u_\sigma + \nabla_\sigma u_\rho\bigr) \tag{2.79}$$

で与えられる．

座標系を $x = (x^0 = t,\, x^i)$ とし，背景時空の計量 $g_{\mu\nu}$ を

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\,\mathrm{d}t^2 + h_{ij}\,(\mathrm{d}x^i - V^i\,\mathrm{d}t)\,(\mathrm{d}x^j - V^j\,\mathrm{d}t) \tag{2.80}$$

と ADM 分解する*10)．このとき，速度ベクトル場 $u^\mu(x)$ とラプス $N(x)$，シフト $V^i(x)$ との関係は

$$u = \frac{1}{N}\,\partial_t + \frac{V^i}{N}\,\partial_i \tag{2.81}$$

で与えられる．

タイムスライス Σ_t 上で定義された様々な物理量に対し，その時間発展を定義する必要があるが，我々は時間微分として

$$\frac{D}{Dt} \equiv N\,\pounds_u \tag{2.82}$$

を採用する [14]．これは，次の 3 条件を満たす演算子である：

(1) Leibniz 則

(2) $\dfrac{D}{Dt}\,u^\mu = 0$

(3) $\dfrac{D}{Dt}\,t = 1$

---

*10) この V^i は，1.2.3 節で導入したシフトベクトル N^i とは符号が逆であることに注意せよ．

ここで，(2) は時間微分が法線方向に沿ったものであることを表し，(3) は t 微分に関する規格化である．

さて，葉層構造（タイムスライスの族）を 1 つ決めると，系が持っていた d 次元一般座標変換不変性についてゲージ固定を行うことになる．しかしこのゲージ固定は完全ではなく，葉層構造を保つ変換 (foliation preserving diffeomorphism) が残留ゲージ対称性として残っている．これは，$V^i = 0$ とおく**同期ゲージ**をとることにより完全に固定でき，そのときには，計量と速度ベクトル場は

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\,\mathrm{d}t^2 + h_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j, \tag{2.83}$$

$$u^\mu\,\partial_\mu = \frac{1}{N}\,\partial_t\,, \quad u_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = -N\,\mathrm{d}t \tag{2.84}$$

となる．このとき，速度ベクトル場に沿った流体粒子の運動の局所固有時間 τ を次で定める：

$$\mathrm{d}\tau \equiv N\,\mathrm{d}t \quad (\Leftrightarrow \partial_t = N\,\partial_\tau)\,. \tag{2.85}$$

すると，

$$e：\ \tau \text{ を用いて測定した固有エネルギー } (\Leftrightarrow\ \partial_\tau), \tag{2.86}$$

$$\mathsf{e}：\ t \text{ を用いて測定したエネルギー } (\Leftrightarrow\ \partial_t) \tag{2.87}$$

という対応がつく．温度 T がエントロピー密度 s を用いて定義されることを思い出せば，

$$T：\ \tau \text{ を用いたときの温度 } (\Leftrightarrow\ \partial_\tau), \tag{2.88}$$

$$\mathsf{T}：\ t \text{ を用いたときの温度 } (\Leftrightarrow\ \partial_t) \tag{2.89}$$

として，上の関係 (2.86) と (2.87) は，

$$\mathsf{e} = N\,e \quad \Leftrightarrow \quad \mathsf{T} = N\,T \tag{2.90}$$

という **Tolman の法則** [21] を表す．

2.4.3　局所的熱力学変数

幾何学的準備が終わったので，次は**局所的熱力学変数**についていくつか定義をする．

一般に局所熱力学変数は次の 3 種類に大別される：

(1) $\{b^A(x)\}$：内的・示強的 (intrinsic, intensive)
(2) $\{c^I(x)\}$：内的・示量的（保存量密度；intrinsic, extensive）
(3) $\{d^P(x)\}$：外的・示強的（背景場；extrinsic, intensive）

先ほど出てきた保存量密度 (p_μ, n) は c 型の変数であり，背景計量 $g_{\mu\nu}$（あるいは背景電磁場）などが d 型の変数である．本書では詳しく扱わないが，粘弾性体における歪みテンソル場 $\varepsilon_{\mu\nu}$ は b 型の変数の典型例である [14],[22]．

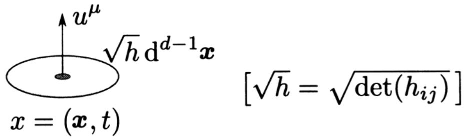


図 2.3　体積要素 $\sqrt{h}\,\mathrm{d}^{d-1}x$.

ところで，保存量密度 $c^I(x)$ については，これに体積要素の重みをかけた

$$\tilde{c}^I(x) \equiv \sqrt{h(x)}\,c^I(x) \qquad \left[\sqrt{h} \equiv \sqrt{\det(h_{ij})}\right] \tag{2.91}$$

を考える方が便利である（図 2.3）．実際，ラベル $\boldsymbol{x}$ を持つ物質粒子が（隣接する物質粒子と相互作用しないときに）保ち続ける保存量は，$c^I(x)$ ではなくこの $\tilde{c}^I(x)$ である．このとき，2.2.1 節で述べた局所熱平衡仮説は，エントロピー密度 $\tilde{s} \equiv \sqrt{h}\,s$ に対し，

$$\tilde{s}(x) = \tilde{s}\big(b(x),\, \tilde{c}(x),\, d(x)\big) \tag{2.92}$$

と表される．また，大域的熱平衡は，2.2.2 節で述べたように，

$$\text{大域的熱平衡} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} b\,\text{型：} & b^A\big|_0 = b_0^A, \\ c\,\text{型：} & \dfrac{\partial \tilde{s}}{\partial \tilde{c}^I}\bigg|_0 = \text{空間方向に一定} \end{cases} \tag{2.93}$$

と表現される．

基本関係式の関数形を決定するため，まず，b 型変数のない 1 成分相対論的流体を考えてみよう．このとき，

$$\tilde{s} = \tilde{s}\big(\tilde{p}_\mu,\, \tilde{n},\, g_{\mu\nu}\big) \tag{2.94}$$

についての Gibbs の基本関係式は次の形になる [14]：

$$\delta\tilde{s} = -\frac{u^\nu}{T}\,\delta\tilde{p}_\nu - \frac{\mu}{T}\,\delta\tilde{n} + \frac{\sqrt{h}}{2\,T}\,T_0^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}\,. \tag{2.95}$$

ここで，T は温度，μ は化学ポテンシャルであり，また，$T_0^{\mu\nu}$ は散逸項がないときのエネルギー運動量テンソルである：

$$T_0^{\mu\nu} = e\,u^\mu\,u^\nu + \tau_0^{\mu\nu} \quad \big(\tau_0^{\mu\nu} = P\,h^{\mu\nu}\,,\; P：\text{圧力}\big)\,. \tag{2.96}$$

実際，相対論的流体では，スカラー量であるエントロピー密度 s は $s = s(e, n)$ と書け，温度と化学ポテンシャルは

$$\delta s = \frac{1}{T}\,\delta e - \frac{\mu}{T}\,\delta n \tag{2.97}$$

によって定義される．この式は，等方的流体に対する Euler の関係式 $e + P = T\,s + n\,\mu$ を用いて変形することができ，

$$\delta\tilde{s} = \frac{1}{T}\,\delta\tilde{e} - \frac{\mu}{T}\,\delta\tilde{n} + \frac{P}{T}\,\delta\sqrt{h} \tag{2.98}$$

となる．さらに $\tilde{e} = \sqrt{-g^{\mu\nu}\,\tilde{p}_\mu\,\tilde{p}_\nu}$ を用いれば，$u^\nu = \tilde{p}^\nu/\tilde{e}$ として，上式は

$$\delta\tilde{s} = -\frac{u^\nu}{T}\,\delta\tilde{p}_\nu - \frac{\mu}{T}\,\delta\tilde{n} + \frac{\sqrt{h}}{2T}\,e\,u^\mu\,u^\nu\,\delta g_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{h}}{2T}\,P\,h^{ij}\,\delta h_{ij} \tag{2.99}$$

と書き直される．この最後の項に公式 $h^{ij}\,\delta h_{ij} = h^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$ を用いれば (2.95) 式が得られる．なお，この公式は，(1.164) 式：

$$\delta g_{\mu\nu} = -u_\mu\,u_\nu\,\frac{2\,\delta N}{N} + e_{i(\mu}\,u_{\nu)}\,\frac{2\,\delta V^i}{N} + e^i_\mu\,e^j_\nu\,\delta h_{ij} \tag{2.100}$$

を $h^{\mu\nu}$ と縮約することで得られる（$h^{\mu\nu}\,u_\nu = 0$ に注意）．

さて，この (2.95) は，

- p_ν の共役量である熱力学的速度が速度ベクトル場に一致していること
- 熱力学を一般共変に記述するためには，$g_{\mu\nu}$ 自身を熱力学変数とみなし，エントロピーは $g_{\mu\nu}$ に依存しているとするのが自然であること

を意味している．一般共変な熱力学では，等方的でない場合についても(2.95) 式が成立していると仮定する [14], [22]．

2.4.4 エントロピーに基づく定式化

ここで，2.4.1 節で述べた Onsager の線形回帰理論を適用しよう．d 型の変数は背景場であるから，ダイナミカルな変数は

$$\{a^r(\boldsymbol{x},t)\} = \{b^A(\boldsymbol{x},t),\,c^I(\boldsymbol{x},t)\} \tag{2.101}$$

であり，Boltzmann–Einstein の原理は，この $\{a^r(\boldsymbol{x},t)\}$ の分布関数が次の形になることを意味する：

$$\mathrm{d}\mu(t) = \mathrm{d}\mu\big[a^r(\boldsymbol{x},t)\big] = \mathrm{e}^{\hat{S}[a(\boldsymbol{x},t)]}\prod_{\boldsymbol{x}}\prod_r \mathrm{d}a^r(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{2.102}$$

このとき，Onsager の線形回帰理論より，$a^r(\boldsymbol{x},t)$ は次の微分方程式に従う：

$$\begin{aligned}\dot{a}^r(\boldsymbol{x},t) &= \big[\dot{a}^r(\boldsymbol{x},t)\big]_{\mathrm{rev}} + \big[\dot{a}^r(\boldsymbol{x},t)\big]_{\mathrm{irr}}\\ &= \big[\dot{a}^r(\boldsymbol{x},t)\big]_{\mathrm{rev}} + L^{rs}\,\frac{\delta\Delta\hat{S}}{\delta a^s(\boldsymbol{x},t)}\,.\end{aligned} \tag{2.103}$$

ここで，$\Delta\hat{S}(t) = \hat{S}(t) - \hat{S}_0$ （$\hat{S}_0$ は大域的平衡での全エントロピーの値）であり，L^{rs} は輸送係数である．

以下，簡単のために，$\tilde{s}$ は $\tilde{c}^I$ のみに依存すると仮定しよう（流体力学の記述のためにはこれで十分である）．このとき，大域的熱平衡は，

$$\text{大域的熱平衡} \;\Leftrightarrow\; h^{\mu\nu}\,\nabla_\nu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^I}\Big) = 0 \tag{2.104}$$

で表現される（$h^{\mu\nu}\,\nabla_\nu$ が Σ_t に接する方向への微分であることに注意）．すると，$\Delta\hat{S}$ が取りうる形は，ΔS について

- 共変で
- 最大化するときに上の方程式を与え
- 空間微分の数が最小のもの

を要請することによって一意に決まり，

$$\Delta\hat{S}[\tilde{c}(\boldsymbol{x},t)] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, N\sqrt{h}\,\ell^{\mu I,\nu J}\,\nabla_\mu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^I}\Big)\nabla_\nu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^J}\Big) \tag{2.105}$$

となる．ここで，係数行列 $\ell^{\mu I,\nu,J}$ は対称かつ正定値であり，添え字 (μ,ν) について空間的で，添え字 (μ,ν), (I,J) の両方について共変である：

$$(\ell^{\mu I,\nu J}) = (\ell^{\nu J,\mu I}) > 0\,, \quad \ell^{\mu I,\nu J}\,u_\nu = 0\,. \tag{2.106}$$

以下，(2.105) に対して (2.103) を用いると，それがカレントの保存則の形にまとまることを示す．

ケース 1：スカラー場

まずウォームアップとして，c^I がスカラーの場合を考えよう．このときは，$N\sqrt{h} = \sqrt{-g}$ より

$$\begin{aligned}
&\delta\,\Delta\hat{S}[\tilde{c}(\boldsymbol{x},t)] \\
&= -\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, N\sqrt{h}\,\ell^{\mu K,\nu L}\,\partial_\mu\Big(\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^K\partial\tilde{c}^I}\,\delta\tilde{c}^I\Big)\,\partial_\nu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^L}\Big) \\
&= \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, N\sqrt{h}\,\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^I\partial\tilde{c}^K}\,\delta\tilde{c}^I\,\nabla_\mu\Big[\ell^{\mu K,\nu L}\,\partial_\nu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^L}\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{2.107}$$

となることが分かり，次の式を得る：

$$\frac{\delta\Delta S}{\delta\tilde{c}^I} = N\,s^0_{IK}\,\nabla_\mu\Big[\ell^{\mu K,\nu L}\,\partial_\nu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^L}\Big)\Big]\,. \tag{2.108}$$

ここで，

$$s^0_{IK} \equiv \sqrt{h}\,\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^I\,\partial\tilde{c}^K} \tag{2.109}$$

は熱力学的安定性（つまり局所熱平衡におけるエントロピー密度の最大値性）より負定値行列である：$s_0 = (s^0_{IK}) < 0$．こうして，時間変化の不可逆部分は

$$\big[\dot{\tilde{c}}^I\big]_{\mathrm{irr}} = \sqrt{h}\,L^{IJ}\,\frac{\delta\Delta S}{\delta\tilde{c}^J} = N\sqrt{h}\,L^{IJ}\,s^0_{JK}\,\nabla_\mu\Big[\ell^{\mu K,\nu L}\,\partial_\nu\Big(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^L}\Big)\Big] \tag{2.110}$$

と求まる．

一方，可逆部分については，より大きなスケールでの有効理論から定まり[*11]，

*11) たとえば流体に対しては，完全流体の流体力学が大きなスケールでの有効理論である．

$$\left[\dot{\tilde{c}}^I\right]_{\text{rev}} = -N\sqrt{h}\,\nabla_\mu J^{I\mu}_{(\text{r})} \tag{2.111}$$

の形になっていると仮定できる．また，数学的な恒等式として，スカラー量の c^I に対し，

$$\dot{\tilde{c}}^I = N\sqrt{h}\,\nabla_\mu(c^I\,u^\mu) \tag{2.112}$$

となることが容易に確認できる．こうして，(2.110)–(2.112) の 3 式より，線形回帰の方程式はカレントの保存則の形にまとまることが分かる：

$$\nabla_\mu J^{I\mu} = 0\,. \tag{2.113}$$

ここで，

$$J^{I\mu} \equiv c^I\,u^\mu + J^{I\mu}_{(\text{r})} + J^{I\mu}_{(\text{d})}\,, \tag{2.114}$$

$$J^{I\mu}_{(\text{d})} \equiv L^{IJ}\,s^0_{JK}\,\ell^{\mu K,\nu L}\,\partial_\nu\!\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{c}^L}\right) \tag{2.115}$$

である．ここで，微分展開の最低次で $L^{IJ}\,s^0_{JK}$ を定数とみなせることを仮定した．$J^{I\mu}$ の第 1 項 $c^I\,u^\mu$ は速度ベクトル場に沿った対流項であり，第 2 項と第 3 項は，それぞれ第 1 項に対する可逆的な補正と散逸的な補正を表す．

とくに，1 成分流体では，粒子数密度 $\tilde{n}$ に対して上の議論が適用でき*12)，$\tilde{n}$ に関する線形回帰の方程式は，

$$\nabla_\mu n^\mu = 0\,, \tag{2.116}$$

$$n^\mu \equiv n\,u^\mu + n^\mu_{(\text{d})} \quad \left[n^\mu_{(\text{d})} \equiv \ell\,h^{\mu\nu}\,\partial_\nu\!\left(-\frac{\mu}{T}\right),\quad \ell > 0\right] \tag{2.117}$$

という保存則になる．ここで等方性から (2.115) のテンソル $L^{IJ}\,s^0_{JK}\,\ell^{\mu K,\nu L}$ を $\ell\,h^{\mu\nu}$ とし，$\partial\tilde{s}/\partial\tilde{n} = -\mu/T$ を用いた．

ケース 2：ベクトル場

上の議論は，保存量密度がベクトル場のときでもそのまま成立する．たとえば，保存量密度がエネルギー運動量ベクトル $[(\tilde{c}^I) = (\tilde{p}_\mu)]$ のときには，

$$\Delta\hat{S}(t) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,\ell_{\mu\alpha,\nu\beta}\,\nabla^\mu\!\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{p}_\alpha}\right)\nabla^\nu\!\left(\frac{\partial\tilde{s}}{\partial\tilde{p}_\beta}\right) \tag{2.118}$$

の形になる．スカラー場の場合との違いは，時空の添え字と熱力学量の添え字がどちらもベクトルの添え字になるため，係数行列がより一般に

$$\ell_{\mu\alpha,\nu\beta} = 2\,\ell_{\text{shear}}\,h^{\mu'}_{\langle\mu}\,h^{\alpha'}_{\alpha\rangle}\,h_{\mu'\nu}\,h_{\alpha'\beta} + \ell_{\text{bulk}}\,h_{\mu\alpha}\,h_{\nu\beta} \tag{2.119}$$

という形を取りうることである．

このときの線形回帰の方程式は，

---

*12) この場合には可逆な補正はない：$n^\mu_{(\text{r})} = 0$．

$$\dot{\tilde{p}}_\alpha = \big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm rev} + \big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr} \tag{2.120}$$

に対し,

$$\dot{\tilde{p}}_\alpha = \sqrt{-g}\,\nabla_\mu(p_\alpha u^\mu)\,, \tag{2.121}$$

$$\big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm rev} = -\sqrt{-g}\,\nabla_\mu \tau_{0\,\alpha}^{\ \ \mu} \quad (\text{たとえば}\ \tau_{0\,\alpha}^{\ \ \mu} = P\,h^\mu_\alpha)\,, \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}\big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr} &= \big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr,\perp} + \big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr,\parallel} \\ &\equiv \sqrt{h}\,L_\perp\,u_\alpha u_\beta \frac{\delta\Delta\tilde{S}}{\delta\tilde{p}_\beta} + \sqrt{h}\,L_\parallel\,h_{\alpha\beta}\frac{\delta\Delta\tilde{S}}{\delta\tilde{p}_\beta}\end{aligned} \tag{2.123}$$

となる．最後の式については,

$$\sqrt{h}\,\frac{\partial^2\tilde{s}}{\partial\tilde{p}_\alpha\,\partial\tilde{p}_\beta} \equiv -c_\perp\,u^\alpha u^\beta - c_\parallel\,h^{\alpha\beta}\,, \tag{2.124}$$

$$\tau_{(d)\alpha}^{\ \ \ \ \ \mu} \equiv -2\,\frac{\ell_{\rm shear}}{T}\,\nabla_{\langle\alpha}u_{\nu\rangle}\,h^{\nu\mu} - \frac{\ell_{\rm bulk}}{T}\,\nabla_\lambda u^\lambda\,h^\mu_\alpha \tag{2.125}$$

として,

$$\big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr,\perp} = -\sqrt{-g}\,c_\perp\,L_\perp\,(-u_\alpha u_\lambda)\,\nabla_\mu\tau_{(d)\alpha}^{\ \ \ \ \ \mu}\,, \tag{2.126}$$

$$\big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr,\parallel} = -\sqrt{-g}\,c_\parallel\,L_\parallel\,h_{\alpha\lambda}\,\nabla_\mu\tau_{(d)\alpha}^{\ \ \ \ \ \mu} \tag{2.127}$$

と書けるが，共変性より

$$c_\perp L_\perp = c_\parallel L_\parallel \equiv L \tag{2.128}$$

でなくてはならないため，結局,

$$\big[\dot{\tilde{p}}_\alpha\big]_{\rm irr} = -\sqrt{-g}\,\nabla_\mu\tau_{(d)\alpha}^{\ \ \ \ \ \mu}\,, \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}\tau_{(d)}^{\alpha\mu} &= -2\,\eta\,\nabla^{\langle\alpha}u^{\mu\rangle} - \zeta\,\nabla_\lambda u^\lambda\,h^{\alpha\mu} \\ &\quad \left(\eta \equiv \frac{L\,\ell_{\rm shear}}{T}\,, \quad \zeta \equiv \frac{L\,\ell_{\rm bulk}}{T}\right),\end{aligned} \tag{2.130}$$

と書き直せる．こうして，$\tilde{p}_\alpha$ に対する線形回帰の方程式は，エネルギー運動量テンソル

$$T^{\alpha\mu} \equiv p^\alpha\,u^\mu + \tau_0^{\alpha\mu} + \tau_{(0)}^{\alpha\mu} = e\,u^\alpha\,u^\mu + \tau_0^{\alpha\mu} + \tau_{(d)}^{\alpha\mu}\,, \tag{2.131}$$

に対する保存則の式としてまとめられることが分かった：

$$\nabla_\mu T^{\alpha\mu} = 0\,. \tag{2.132}$$

こうして，前節の結果 (2.49)–(2.51) のすべてがエントロピーのみに基づいた議論からすべて再現された．

第 3 章

曲がった時空上の場の量子論と熱力学

本章では曲がった時空における場の量子論の一般論を展開し，熱力学的な構造が自然に現れることを解説する．

3.1 曲がった時空上の場の量子論

本節ではまず曲がった時空における場の量子化について解説する．曲がった時空上の場の量子論に関する標準的なテキストとしては [23], [24] などがある．

3.1.1 Klein–Gordon 内積と正エネルギー解

計量が $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$ で表される d 次元時空において，質量 m の自由スカラー場 $\phi(x)$ を考える．このとき，作用汎関数は

$$S[\phi(x)] = \int \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\Big[-\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\phi(x)\,\partial_\nu\phi(x) - \frac{m^2}{2}\,\phi^2(x)\Big] \quad (3.1)$$

で与えられ，運動方程式は

$$(\Box - m^2)\,\phi(x) = 0 \quad \Big[\Box \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu\big(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\nu\big)\Big] \quad (3.2)$$

となる．運動方程式を満たす古典解全体が作る複素線形空間を $\mathrm{Sol} \equiv \{f(x)\}$ とおき［$f(x)$ は一般に複素数値をとるとする］，2 つの解 $f(x), g(x) \in \mathrm{Sol}$ に対し，次の **Klein–Gordon 内積**（KG 内積）を導入する：

$$\langle f,\, g\rangle_\Sigma \equiv \mathrm{i}\int_\Sigma \mathrm{d}S^\mu\big[f^*(x)\,\partial_\mu g(x) - \partial_\mu f^*(x)\,g(x)\big]\,. \quad (3.3)$$

ここで Σ は空間的無限遠を含むある Cauchy 面である（図 3.1）．実はこの KG 内積は Cauchy 面のとり方に依らないことがすぐ分かる．実際，$f(x), g(x)$ がともに運動方程式 (3.2) を満たすことから，カレント $j_\mu \equiv \mathrm{i}\big(f^*\,\partial_\mu g - \partial_\mu f^*\,g\big)$ は保存する：

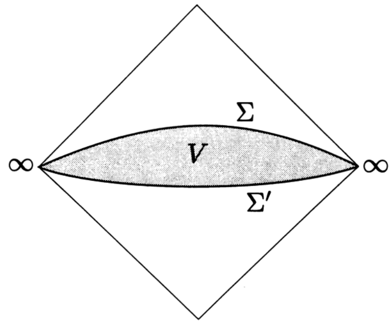


図 3.1　2 つの Cauchy 面 Σ と Σ'．V は 2 つに囲まれた d 次元領域．

$$\nabla_\mu j^\mu = \mathrm{i}\big(f^* \cdot \Box g - \Box f^* \cdot g\big) = \mathrm{i}\big(f^* \cdot m^2 g^* - m^2 f^* \cdot g\big) = 0\,. \quad (3.4)$$

これを，2 つの Cauchy 面 Σ, Σ' で囲まれた d 次元領域 V で積分すれば，Stokes の定理より

$$0 = \int_V \mathrm{d}V\, \nabla_\mu j^\mu = \int_{\partial V} \mathrm{d}S_\mu\, j^\mu = \langle f,\, g\rangle_\Sigma - \langle f,\, g\rangle_{\Sigma'} \quad (3.5)$$

となり，Σ のとり方に依らないことが分かる．また，定義から KG 内積が次の性質を満たすこともすぐ分かる：

$$\langle g,\, f\rangle = \langle f,\, g\rangle^*\,, \quad (3.6)$$

$$\langle f^*,\, g^*\rangle = -\langle g,\, f\rangle = -\langle f,\, g\rangle^*\,. \quad (3.7)$$

なお，この内積は正定値性を持たず，エルミート内積になっていないことに注意せよ．

この KG 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ に対し，

$$\langle \varphi_I,\, \varphi_J\rangle = \delta_{IJ}\,, \quad \langle \varphi_I,\, \varphi_J^*\rangle = 0\,, \quad (3.8)$$

$$\langle \varphi_I^*,\, \varphi_J\rangle = 0\,, \quad \langle \varphi_I^*,\, \varphi_J^*\rangle = -\delta_{IJ} \quad (3.9)$$

を満たす関数の極大集合 $\{\varphi_I(x)\}$ を**正エネルギー解の完全系**と呼び，解のラベル I を**モード**と呼ぶ．正エネルギー解の完全系 $\{\varphi_I(x)\}$ が 1 つ与えられると，（実）スカラー場 $\phi(x)$ は次のようにして量子化できる[*1)]：

$$\phi(x) = \sum_I \big[a_I\, \varphi_I(x) + a_I^\dagger\, \varphi_I^*(x)\big]\,, \quad (3.10)$$

$$[a_I,\, a_J^\dagger] = \delta_{IJ}\,, \quad [a_I,\, a_J] = 0 = [a_I^\dagger,\, a_J^\dagger]\,. \quad (3.11)$$

また，真空状態 $|0\rangle$ は

---

*1)　逆に消滅・生成演算子 $\{a_I,\, a_I^\dagger\}$ は場 $\phi(x)$ より

$$a_I = \langle \varphi_I,\, \phi\rangle\,, \quad a_I^\dagger = -\langle \varphi_I^*,\, \phi\rangle$$

として求まる．

$$a_I \,|0\rangle = 0 \quad (\forall I) \tag{3.12}$$

として定義される．このとき，**Feynman 伝播関数**は

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \langle 0|\, \mathrm{T}\, \phi(x)\, \phi(y) \,|0\rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \sum_I \varphi_I(x)\, \varphi_I^*(y) + \theta(y^0 - x^0) \sum_I \varphi_I(y)\, \varphi_I^*(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

で与えられる．

例：Minkowski 時空

d 次元 Minkowski 時空 $\mathbb{R}^{1,d-1}$ (計量：$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$) では，時刻一定面 $\Sigma_t = \{x \in \mathbb{R}^{1,d-1}\,;\, x^0 = t\}$ 上で KG 内積

$$\langle f,\, g\rangle = \mathrm{i} \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x} \left[f^*(t,\boldsymbol{x})\, \partial_t g(t,\boldsymbol{x}) - \partial_t f^*(t,\boldsymbol{x})\, g(t,\boldsymbol{x}) \right] \tag{3.14}$$

を考えることができるが，このとき，$d-1$ 次元波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k^i) \in \mathbb{R}^{d-1}$ $(i = 1, \ldots, d-1)$ でラベルされる次の関数全体：

$$\left\{ \varphi_{\boldsymbol{k}}(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{d-1}\, 2\omega_k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \mathrm{i}\omega_k t} \right\} \tag{3.15}$$

は正エネルギー解の完全系になっている ($\omega_k \equiv \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m^2}$)．このとき，実スカラー場は，生成・消滅演算子

$$[a_{\boldsymbol{k}},\, a_{\boldsymbol{k}'}^\dagger] = \delta^{d-1}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \quad [a_{\boldsymbol{k}},\, a_{\boldsymbol{k}'}] = 0 = [a_{\boldsymbol{k}}^\dagger,\, a_{\boldsymbol{k}'}^\dagger] \tag{3.16}$$

を用いて，

$$\phi(x) = \phi(t,\boldsymbol{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{k}}{\sqrt{(2\pi)^{d-1}\, 2\omega_k}} \left(a_{\boldsymbol{k}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \mathrm{i}\omega_k t} + a_{\boldsymbol{k}}^\dagger\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \mathrm{i}\omega_k t} \right) \tag{3.17}$$

と展開される．また，Feynman 伝播関数は，

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{d-1}\, 2\omega_k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \mathrm{i}\omega_k (x^0 - y^0)} \\ &\qquad + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^{d-1}\, 2\omega_k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \mathrm{i}\omega_k (y^0 - x^0)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\, \frac{-\mathrm{i}}{k^2 + m^2 - \mathrm{i}\varepsilon}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-y)} \end{aligned} \tag{3.18}$$

で与えられる．

3.1.2 正エネルギー解の完全系の不定性と Bogoliubov 変換

実は正エネルギー解の完全系の選び方には不定性がある．実際，ある完全系

$\{\varphi_I(x)\}$ に対し，別の関数の集合 $\{\varphi'_I(x)\}$：

$$\varphi'_I(x) = \sum_J \left[\alpha_{IJ}\,\varphi_J(x) + \beta_{IJ}\,\varphi^*_J(x)\right], \tag{3.19}$$

$$\varphi'^*_I(x) = \sum_J \left[\beta^*_{IJ}\,\varphi_J(x) + \alpha^*_{IJ}\,\varphi^*_J(x)\right], \tag{3.20}$$

が次の 4 つの関係式*2)

$$\alpha\cdot\alpha^\dagger - \beta\cdot\beta^\dagger = \mathbf{1}\,, \qquad \alpha\cdot\beta^T - \beta\cdot\alpha^T = 0\,, \tag{3.21}$$

$$\alpha^\dagger\cdot\alpha - \beta^T\cdot\beta^* = \mathbf{1}\,, \qquad \alpha^\dagger\cdot\beta - \beta^T\cdot\alpha^* = 0 \tag{3.22}$$

を満たすとすると，容易に分かるように，この $\{\varphi'_I(x)\}$ も条件 (3.8), (3.9) を満たす．このときの変換 (3.19), (3.20) のことを **Bogoliubov 変換**といい，係数 α_{IJ}, β_{IJ} は **Bogoliubov 係数**と呼ばれる．なお，Bogoliubov 係数は KG 内積を用いて次のように書ける：

$$\alpha_{IJ} = \langle\varphi'_I, \varphi_J\rangle\,, \qquad \beta_{IJ} = -\langle\varphi'_I, \varphi^*_J\rangle\,, \tag{3.23}$$

$$\alpha^*_{IJ} = -\langle\varphi'^*_I, \varphi^*_J\rangle\,, \qquad \beta^*_{IJ} = \langle\varphi'^*_I, \varphi^*_J\rangle\,. \tag{3.24}$$

また，生成・消滅演算子は

$$a'_I = \sum_J \left(\alpha^*_{IJ}\,a_J - \beta^*_{IJ}\,a^\dagger_J\right), \quad a'^\dagger_I = \sum_J \left(-\beta_{IJ}\,a_J + \alpha_{IJ}\,a^\dagger_J\right) \tag{3.25}$$

と変換され，これに対して，新しい真空状態 $|0'\rangle$ が

$$a'_I\,|0'\rangle = 0 \quad (\forall I) \tag{3.26}$$

として定義される．

以上の議論より，条件 (3.8), (3.9) だけでは正エネルギー解の完全系は一意に決まらず，Bogoliubov 変換分の不定性があることが分かった．ここで，$\beta = (\beta_{IJ}) = 0$ のときは，もとの量子化と本質的な差がないことに注意しよう．実際，この場合には a'_I は a_J の（ユニタリ行列を係数とする）1 次結合で書かれるため，$|0'\rangle \propto |0\rangle$ となり，真空自体は変更を受けない．このように $\beta \neq 0$ のときだけが真空を本質的に変える Bogoliubov 変換となっている．

$\beta \neq 0$ のときに起こる典型的な現象として，モード I の粒子数 $N_I \equiv a^\dagger_I\,a_I$ を新しい真空 $|0'\rangle$ で測定することを考えてみよう．すると，

$$\begin{aligned}\langle 0'|N_I|0'\rangle &= \langle 0'|\sum_K \left(-\beta'_{IK}\,a'_K + \alpha_{IK}\,a'^\dagger_K\right) \sum_L \left(\alpha'^*_{IL}\,a'_L - \beta'^*_{IL}\,a'^\dagger_L\right)|0'\rangle \\ &= \sum_K |\beta'_{IK}|^2 = \sum_K |\beta_{KI}|^2\end{aligned} \tag{3.27}$$

*2)　ここで $\alpha \equiv (\alpha_{IJ})$, $\beta \equiv (\beta_{IJ})$．2 行目の関係式は，逆変換 $\alpha' = \alpha^\dagger$, $\beta' = -\beta^T$ が矛盾なく存在するための条件で 1 行目とは独立な関係式である．

となり，新しい真空でみると粒子の生成が起こっているように見えることが分かる．実際，重力崩壊によるブラックホールの生成では，崩壊の前後で正エネルギー解の完全系が非自明な Bogoliubov 変換で関係し，その結果，十分未来における十分遠方の観測者は，表面重力に比例した温度（Hawking 温度）の Planck 分布に従う粒子生成を観測するようになる．詳しいことは付録 D を見よ．

3.1.3 自然な真空

前節で述べたように，真空のとり方には不定性があるが，自然な選び方が存在する場合がある．

例 1：大域的な時間的 Killing ベクトル場があるとき

時空が高い対称性を持ち，とくに大域的な時間的 Killing ベクトル場 $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ が存在するときには，それを生成するパラメーター t を時間変数として選び（つまり $\xi = \partial_t$），正エネルギー解の完全系を

$$\varphi_I(x) = \varphi_I(t, \boldsymbol{x}) = \varphi_I(\boldsymbol{x})\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_I t} \quad (\omega_I > 0) \tag{3.28}$$

の形を持つものとして指定することができる．実際，複素共役をとると指数の中の t の係数の符号が変わるため，この条件下で許される Bogoliubov 変換は $\beta = 0$ の自明な場合しかない．

時空の対称性が十分高い場合には，大域的な時間的 Killing ベクトル場 ξ が複数存在することがある．そのときには，ξ のとり方によっていろいろな真空が存在することになるが，通常は真空の対称性が最も高くなる ξ をとることが多い．例えば，Minkowski 時空 $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}^2$ は Poincaré 対称性という高い対称性を持つが，t を時間変数として選んだときの真空だけが Poincaré 変換のもとで不変になっている．次節において，他の Killing ベクトル場を採用するとどうなるかを詳しく議論する．

例 2：漸近的に時間的 Killing ベクトル場を持つとき

あるベクトル場 ξ が時空の過去と未来の両方で漸近的に時間的 Killing ベクトル場になっていることがある（つまり，$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \to 0$）．このときには過去と未来で独立に生成パラメーターをとることができる：

$$\xi \to \partial_{t_{\mathrm{in}}}\ (\text{過去}), \quad \xi \to \partial_{t_{\mathrm{out}}}\ (\text{未来}). \tag{3.29}$$

これに応じて漸近的に真空と見なせる状態が過去と未来のそれぞれで定義できるが，それを $|0;\mathrm{in}\rangle$, $|0;\mathrm{out}\rangle$ と書く．一般に $|0;\mathrm{in}\rangle \not\propto |0;\mathrm{out}\rangle$ である．

例 3：より一般の場合

時空が対称性をとくに持たないが大域的に双曲な場合には（1.7 節参照），Cauchy 面からなる葉層構造を導入することができ，それをパラメトライズす

るものとして時間 t を導入することができる．この時間 t に対応してハミルトニアン H が導入できるが，このハミルトニアンは一般に時間 t に陽に依存する．この場合には，$H(t)$ の瞬間的基底状態として各時刻 t で真空を定義し，t でパラメトライズされた真空の集合 $\{|0_t\rangle\}$ を導入することができる．これに関する一般論については文献 [25] を参照されたい．

3.2 Rindler 時空上の場の量子論と Unruh 効果

3.2.1 Unruh 効果

上で述べたとおり，Minkowski 時空 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{1,d-1}$ は Poincaré 群の対称性を持つ．以下簡単のため $(1+1)$ 次元を考え，その座標を $(x^\mu) = (t,\, z)$ $(\mu = 0, 1)$ とおく．このとき，計量は $\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2$ で与えられる．$\mathcal{M}$ 上では，次の 2 つの時間的 Killing ベクトル場を考えることができる：

(1) $\xi_{\mathrm{M}} = \xi^\mu_{\mathrm{M}}\,\partial_\mu \equiv \partial_t$．$\xi^2_{\mathrm{M}} = \eta_{\mu\nu}\,\xi^\mu_{\mathrm{M}}\,\xi^\nu_{\mathrm{M}} = -1$ であるから，ξ_{M} は $\mathcal{M}$ の全領域で時間的である．対応する演算子が通常使われているハミルトニアン H であり，真空 $|0\rangle$ は H の基底状態として定義される．$|0\rangle$ は，通常の場合，さらに Poincaré 不変にもなっている．

(2) $\bar{\xi}_{\mathrm{R}} \equiv t\,\partial_z + z\,\partial_t$．これは Lorentz ブーストを生成する．$\bar{\xi}^2_{\mathrm{R}} = t^2 - z^2$ であるため，$\bar{\xi}_{\mathrm{R}}$ は領域 $z^2 > t^2$ でのみ時間的である（図 3.2）．この領域は左右 2 つの Rindler ウェッジからなり，左側を (L)，右側を (R) と書くことにする．とくに (R) では $\bar{\xi}_{\mathrm{R}}$ は未来方向である．これに対応するハミルトニアンを $\bar{H}_{\mathrm{R}}$ と書く．

今，Rindler ウェッジ (R) において Cauchy 面（今の場合は曲線）Σ を図のように置き，$\bar{H}_{\mathrm{R}}$ による時間発展を考える．このとき，(L) 内のデータは Σ の未来に何の影響も与えない．一方，$\mathcal{M}$ 全体をハミルトニアン H で扱う場合には，

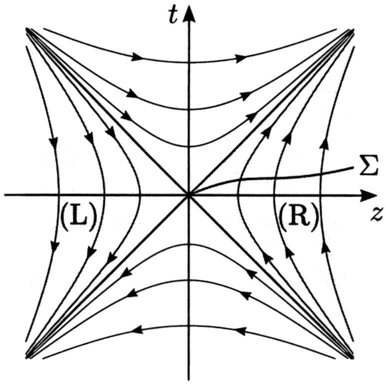


図 3.2　2 つの Rindler ウェッジ (L) と (R)．矢印はブースト Killing ベクトル場 $\bar{\xi}_{\mathrm{R}}$ を表す．

Cauchy 面は (L) と (R) の両方をまたぐ必要がある．そこで，(R) 上の Hilbert 空間に制限するように (L) の部分についてトレースをとると，後で証明するように，次式が成立する [26], [27]：

$$\rho_{\mathrm{R}} \equiv \mathrm{tr}_{\mathrm{L}} |0\rangle\langle 0| = \frac{\mathrm{e}^{-\bar{\beta}_0 \bar{H}_{\mathrm{R}}}}{\mathrm{tr}_{\mathrm{R}}\, \mathrm{e}^{-\bar{\beta}_0 \bar{H}_{\mathrm{R}}}}\,. \tag{3.30}$$

ここで $\bar{\beta}_0 = 2\pi/\hbar$ である．(3.30) 式は，純粋状態の密度行列 $\rho \equiv |0\rangle\langle 0|$ を領域 (R) に制限すると，($\bar{H}_{\mathrm{R}}$ に対する）温度 $\bar{T}_0 = 1/\bar{\beta}_0 = \hbar/2\pi$ の Gibbs 分布の密度行列を与えることを意味している．つまり，標語的に書けば，(R) に制限した状況では

『H に関する真空 $=$ $\bar{H}_{\mathrm{R}}$ に関する熱的状態』

が成り立っている．なお，$\bar{T}_0$ は無次元だが，これはそもそも $\bar{\xi}_{\mathrm{R}}$ が無次元であったためである．

$\bar{H}_{\mathrm{R}}$ をハミルトニアンとする見方をより明確にするため，領域 (R) に対して，(1.232) 式で与えられる Rindler 座標 $(x^\mu_{\mathrm{R}}) = (t_{\mathrm{R}}, z_{\mathrm{R}})$ を導入する［計量は (1.233) で与えたように $\mathrm{d}s^2 = -(\kappa\, z_{\mathrm{R}})^2 \mathrm{d}t_{\mathrm{R}}^2 + \mathrm{d}z_{\mathrm{R}}^2$ となる］．Rindler 時空において「z_{R} = 一定」の軌道は，固有加速度の大きさ a が $a = 1/z_{\mathrm{R}}$ の等加速度運動になっていることが容易に確認できる．ここで,「z_{R} = 一定」の軌道における局所的な固有時間 τ_{R} は $\mathrm{d}\tau_{\mathrm{R}} = (\kappa\, z_{\mathrm{R}})\, \mathrm{d}t_{\mathrm{R}}$ と書けるので，t_{R} を用いて測定したときの加速度は $(\mathrm{d}\tau_{\mathrm{R}}/\mathrm{d}t_{\mathrm{R}})\,(1/z_{\mathrm{R}}) = \kappa$ となり，すべての軌道に対して共通の値をとる．また,

$$\xi_{\mathrm{R}} \equiv \partial_{t_{\mathrm{R}}} = \kappa \left(z\, \partial_t + t\, \partial_z \right) = \kappa\, \bar{\xi}_{\mathrm{R}} \tag{3.31}$$

であるから，t_{R} に対応するハミルトニアンを H_{R} とすれば，$H_{\mathrm{R}} = \kappa\, \bar{H}_{\mathrm{R}}$ となることが分かる．これに応じて，H_{R} を用いて定義される温度は,

$$T_0 = \kappa\, \bar{T}_0 = \frac{\hbar\, \kappa}{2\pi} \tag{3.32}$$

となる．

なお，局所固有時間 τ_{R} を用いて測定した局所温度 T は，$T = (\mathrm{d}t_{\mathrm{R}}/\mathrm{d}\tau_{\mathrm{R}})\, T_0 = \hbar\, a/2\pi$ $(a = 1/z_{\mathrm{R}})$ と固有加速度の大きさに比例する．この T を **Unruh 温度**という．

ここで，κ が Killing ベクトル場 ξ_{R} に対する Killing ホライズン $t \pm z$ 上の表面重力になっていることに注意しよう．実際，Minkowski 座標 (t, z) を用いれば，$\xi^\mu_{\mathrm{R}} = (\xi^0_{\mathrm{R}},\, \xi^1_{\mathrm{R}}) = (\kappa\, z,\, \kappa\, t)$ であるので,

$$\xi^\nu_{\mathrm{R}}\, \partial_\nu \xi^\mu_{\mathrm{R}} = \pm\kappa\, \xi^\mu_{\mathrm{R}} \quad (t = \pm z\ \text{上}) \tag{3.33}$$

となることがすぐわかる[*3)].

3.2.2 式 (3.30) の証明

より一般に次の d 次元 Rindler 時空を考える：

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{R}}^2 = g_{\mu\nu}^{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}x_{\mathrm{R}}^{\mu}\,\mathrm{d}x_{\mathrm{R}}^{\nu} = -(\kappa\, z_{\mathrm{R}})^2\,\mathrm{d}t_{\mathrm{R}}^2 + \mathrm{d}z_{\mathrm{R}}^2 + \mathrm{d}x_{\perp}^2 \quad (z_{\mathrm{R}} > 0)\,. \tag{3.34}$$

これは，次の変換を通して Minkowski 時空内のくさび状の部分領域 (R) とみなせる：

$$\begin{aligned} &t = z_{\mathrm{R}}\,\sinh(\kappa\, t_{\mathrm{R}})\,, \quad z = z_{\mathrm{R}}\,\cosh(\kappa\, t_{\mathrm{R}})\,, \\ &x^i = x_{\mathrm{R}}^i \equiv x_{\perp}^i \quad (i = 1, \ldots, d-2)\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

2 つの Killing ベクトル場：$\xi_{\mathrm{M}} = \partial_t$, $\xi_{\mathrm{R}} = \partial_{t_{\mathrm{R}}} = \kappa\,(z\,\partial_t + t\,\partial_z)$ に対し，ξ_{M} に対応するハミルトニアン H_{M} の真空を $|0_{\mathrm{M}}\rangle$，ξ_{R} に対応するハミルトニアン H_{R} の真空を $|0_{\mathrm{R}}\rangle$ とおく.

今証明したいことは，領域 (R) におけるスカラー場 $\phi(x) = \phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})$ に対して，次の等式が成り立つことである：

$$\langle 0_{\mathrm{M}}|\,\mathrm{T}_{\mathrm{M}}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,|0_{\mathrm{M}}\rangle = \frac{\mathrm{tr}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\hbar\kappa}H_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{T}_{\mathrm{R}}\phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R},1})\cdots\phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R},n})}{\mathrm{tr}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\hbar\kappa}H_{\mathrm{R}}}} \quad \big[x_1, \ldots, x_n \in \text{Rindler ウェッジ (R)}\big]\,. \tag{3.36}$$

ここで，T_{M} は t に対する時間順序積，T_{R} は t_{R} に対する時間順序積である. 左辺が

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}_{\mathrm{L}\otimes\mathrm{R}}\big[\,|0_{\mathrm{M}}\rangle\langle 0_{\mathrm{M}}|\,\mathrm{T}_{\mathrm{M}}\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\big] \\ &= \mathrm{tr}_{\mathrm{R}}\big[\big(\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}\,|0_{\mathrm{M}}\rangle\langle 0_{\mathrm{M}}|\big)\,\mathrm{T}_{\mathrm{R}}\phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R},1})\cdots\phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R},n})\big] \end{aligned} \tag{3.37}$$

と書けることを使えば，式 (3.36) は

$$\mathrm{tr}_{\mathrm{L}}\,|0_{\mathrm{M}}\rangle\langle 0_{\mathrm{M}}| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\hbar\kappa}H_{\mathrm{R}}}}{\mathrm{tr}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\hbar\kappa}H_{\mathrm{R}}}} \tag{3.38}$$

と等価であることが分かる.

式 (3.36) を示すため，まず次の命題を証明する.

命題 3.1 計量 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(t, \boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}$ の時空上の実スカラー場 $\phi(x) = \phi(t, \boldsymbol{x})$ に対し，外場 $J(x)$ 付きの次の作用汎関数を考える：

---

*3) (1.196) 式を用いて表面重力 κ を計算するときは，ホライズン ($t = \pm z$) で計量が特異にならない座標系を用いる必要があることに注意せよ．例えば，ホライズンが境界となっている Rindler 座標系で計算すると $\kappa = 0$ という間違った結果が出てしまう．このことは，Schwarzschild ブラックホールの表面重力を Schwarzschild 座標を用いて (1.196) 式から計算すると間違えてしまうことと同じ事情である.

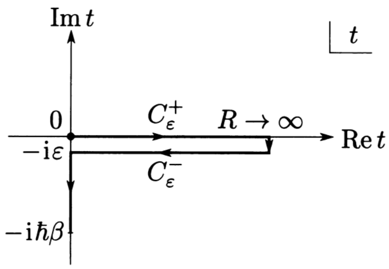


図 3.3　新しい積分経路.

$$
\begin{aligned}
&S[\phi, J] \\
&\equiv \int_0^{-\mathrm{i}\hbar\beta} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \sqrt{-g(x)}\left[-\frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}(x)\,\partial_\mu\phi(x)\,\partial_\nu\phi(x) - V(\phi(x))\right] \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \sqrt{-g(x)}\, J(x)\,\phi(x)\,.
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

ここで，$\phi(t, \boldsymbol{x})$ は，$t \in \mathbb{R}$ のときに実関数となるような，$t \in \mathbb{C}$ で定義された周期 $\mathrm{i}\hbar\beta$ の複素数値関数であるとする*4)．このとき，次の等式が成り立つ (PBC は周期境界条件をおいて経路積分を行うことを表す)：

$$
\begin{aligned}
Z[J] &\equiv \mathrm{tr}\, \mathrm{e}^{-\beta H}\ \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \sqrt{-g(x)}\, J(x)\,\phi(x)} \\
&= \int_{\mathrm{PBC}} [\mathrm{d}\phi]\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S[\phi, J]}\ .
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

[命題の証明]

式 (3.39) 右辺第 1 項の経路を，図 3.3 のように，微小な正の実数 ε を用いて，経路 C_ϵ に変形する．このとき，部分経路 C_ε^+ と C_ε^- からの寄与は $\varepsilon \to 0$ の極限で相殺するため，変形前と変形後の違いは $\mathcal{O}(\varepsilon)$ でしかないことが分かる．従って，外場 $J(x)$ の台が C_ε^+ のみにあるとすることで，$S[\phi, J]$ は次のように書き直すことができる：

$$
\begin{aligned}
S[\phi, J] &= \lim_{\varepsilon\to 0} S_{C_\varepsilon}[\phi, J] \\
&\equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\, \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}\, g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - V(\phi) + J\,\phi\right].
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

一方，

$$
Z_{C_\varepsilon}[J] \equiv \mathrm{tr}\,\mathrm{T}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{C_\varepsilon}\mathrm{d}t \left(H(t) - \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,\sqrt{-g}\, J\,\phi\right)\right] \tag{3.42}
$$

に対して，経路 C_ε を小区間に分け，$\phi(\boldsymbol{x})$ の完全系をはさんでいけば，次の経

*4)　この条件より，$\phi(t, \boldsymbol{x})$ は次の展開形を持つ：$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\boldsymbol{x})\ \mathrm{e}^{-\frac{2\pi n t}{\hbar\beta}}$, $f_n^*(\boldsymbol{x}) = f_n(\boldsymbol{x})$.

路積分表示が得られる：

$$Z_{C_\varepsilon}[J] = \int_{\mathrm{PBC}} [\mathrm{d}\phi]\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_{C_\varepsilon}[\phi, J]}\ . \tag{3.43}$$

こうして，等式：

$$\int_{\mathrm{PBC}} [\mathrm{d}\phi]\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_{C_\varepsilon}[\phi, J]} = \mathrm{tr}\,\mathrm{T}\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{C_\varepsilon} \mathrm{d}t\,\Big(H(t) - \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\sqrt{-g}\,J\phi\Big)\Big] \tag{3.44}$$

が得られた．$\varepsilon \to 0$ の極限をとれば，(3.40) が得られる． □

[式 (3.36) の証明]

$\beta = 2\pi/\hbar\kappa$ とすれば（従って周期は $\hbar\beta = 2\pi/\kappa$），命題より，

$$\begin{aligned} &S_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}, J_{\mathrm{R}}] \\ &= \int_{+\mathrm{i}\pi/\kappa}^{-\mathrm{i}\pi/\kappa} \mathrm{d}t_{\mathrm{R}} \int \mathrm{d}z_{\mathrm{R}}\,\mathrm{d}^{d-2}\boldsymbol{x}_\perp\,\sqrt{-g_{\mathrm{R}}}\,\Big[-\frac{1}{2}\,g_{\mathrm{R}}^{\mu\nu}\,\partial_{x_{\mathrm{R}}^\mu}\phi_{\mathrm{R}}\,\partial_{x_{\mathrm{R}}^\nu}\phi_{\mathrm{R}} - V(\phi_{\mathrm{R}})\Big] \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_{\mathrm{R}} \int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}\,\sqrt{-g_{\mathrm{R}}}\,J_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})\,\phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}}) \end{aligned} \tag{3.45}$$

に対して，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{R}}[J_{\mathrm{R}}] &\equiv \mathrm{tr}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\beta H_{\mathrm{R}}}\ \mathrm{T}_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t_{\mathrm{R}}\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{R}}\,\sqrt{-g_{\mathrm{R}}}\,J_{\mathrm{R}}\,\phi_{\mathrm{R}}} \\ &= \int_{\mathrm{PBC}} [\mathrm{d}\phi_{\mathrm{R}}]\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}, J_{\mathrm{R}}]}\ . \end{aligned} \tag{3.46}$$

ここで，式 (3.45) の右辺第 1 項に注目する．変換 (3.35) が，$\mathrm{i}t = z_{\mathrm{R}}\sin(\mathrm{i}\kappa\,t_{\mathrm{R}})$, $z = z_{\mathrm{R}}\cos(\mathrm{i}\kappa\,t_{\mathrm{R}})$ と書けることから，Euclid 領域 $\{(\mathrm{i}t_{\mathrm{R}}, z_{\mathrm{R}})\,;\ -\pi/\kappa < \mathrm{i}t_{\mathrm{R}} < \pi/\kappa\,,\ 0 < z_{\mathrm{R}} < \infty\}$ は 2 次元平面 $\{(\mathrm{i}t, z)\} = \mathbb{R}^2$ の上に 1 対 1 に写されることが分かる．従って，$\phi(x) = \phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})$, $J(x) = J_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})$ とすれば，

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{R}}[\phi_{\mathrm{R}}, J_{\mathrm{R}}] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(\mathrm{i}t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\ \mathrm{d}^{d-2}\boldsymbol{x}_\perp\,\Big[-\frac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)\Big] \\ &\quad + \int_{(\mathrm{R})}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,J(x)\,\phi(x) \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_{-\mathrm{i}T/2}^{+\mathrm{i}T/2}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,\Big[-\frac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)\Big] \\ &\quad + \int_{(\mathrm{R})}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^{d-1}\boldsymbol{x}\,J(x)\,\phi(x) \\ &\equiv \lim_{T\to\infty} S_T[\phi, J] \end{aligned} \tag{3.47}$$

となり，

$$Z_{\mathrm{R}}[J_{\mathrm{R}}] = \lim_{T\to\infty}\int_{\mathrm{PBC}}[\mathrm{d}\phi]\ \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar} S_T[\phi, J]} \tag{3.48}$$

を得る．再び命題を用いれば，

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{R}}[J_{\mathrm{R}}] &= \lim_{T\to\infty} \operatorname{tr} \mathrm{e}^{-H_{\mathrm{M}}T/\hbar}\ \mathrm{T_M}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{(\mathrm{R})}\mathrm{d}^d x\, J(x)\,\phi(x)} \\
&= \lim_{T\to\infty} \operatorname{tr} \mathrm{e}^{-E_0^{\mathrm{M}}T/\hbar} \langle 0_{\mathrm{M}}|\, \mathrm{T_M}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{(\mathrm{R})}\mathrm{d}^d x\, J(x)\,\phi(x)}\, |0_{\mathrm{M}}\rangle
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

となるため，比 $Z_{\mathrm{R}}[J_{\mathrm{R}}]/Z_{\mathrm{R}}[0]$ をとることにより，等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{tr_R} \mathrm{e}^{-\beta H_{\mathrm{R}}}\ \mathrm{T_R}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int \mathrm{d}^d x_{\mathrm{R}}\, J_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})\,\phi_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}})}}{\operatorname{tr_R} \mathrm{e}^{-\beta H_{\mathrm{R}}}} \\
&\quad = \langle 0_{\mathrm{M}}|\, \mathrm{T_M}\, \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{(\mathrm{R})}\mathrm{d}^d x\, J(x)\,\phi(x)}\, |0_{\mathrm{M}}\rangle
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

を得る．後は，$\sqrt{-g_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{d}^d x_{\mathrm{R}} = \mathrm{d}^d x$ に注意して，$J_{\mathrm{R}}(x_{\mathrm{R}}) = J(x)$ に関する変分をとり，最後に $J = 0$ と置くことで，式 (3.36) が得られる． □

3.2.3 ホライズンとエントロピー

以上の議論から，等加速度運動して Rindler 領域 (R) を出ないようにしている観測者にとって，純粋状態である Minkowski 時空の真空 $|0_{\mathrm{M}}\rangle$ は熱的な混合状態として振る舞うことが分かった．とくに，対応する密度行列 $\rho_{\mathrm{R}} = \operatorname{tr_L} |0_{\mathrm{M}}\rangle\langle 0_{\mathrm{M}}|$ は加速度に比例した温度を持つ Gibbs 分布のものになっている．

こうしたことが起きる本質的な理由は，イベントホライズンが存在することである（図 3.4）．実際，等加速度運動する観測者にとって，図 3.4 のような過程でホライズン $\mathcal{H}^+$ の中に入ってしまった情報は（古典的には）二度と取り出せなくなってしまう．

一般に，イベントホライズンの存在により，基本的な力学変数の中で，決定論的に扱えなくなるものが出てくる．4.2 節では，イベントホライズンがあるときのエントロピーについて，その計算方法を詳しく解説する．

3.2.4 Unruh 効果を用いた Hawking 温度の導出

本小節では Schwarzschild ブラックホールが Hawking 温度 $T = \hbar\kappa/2\pi$ の熱浴とみなせることを示す[26]．従って，熱平衡状態では同じ温度で Planck 輻射をするはずである．この輻射（**Hawking 輻射**）については付録 D で解説する．

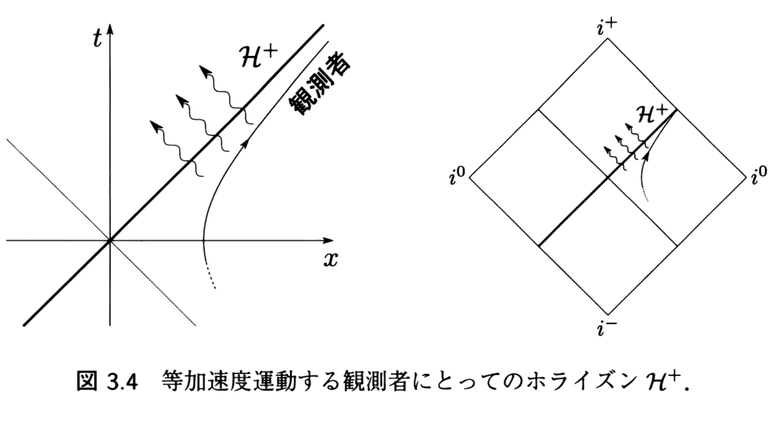


図 3.4　等加速度運動する観測者にとってのホライズン $\mathcal{H}^+$.

Schwarzschild 座標 (1.174) で動径 r 一定の所で静止している観測者 (FIDO: fiducial observer) を考えよう．FIDO は，ブラックホールの引力に逆らって常に加速運動をしている．実際に，FIDO の速度ベクトル $u^\mu \partial_\mu = (1 - 2GM/r)^{-1/2}\partial_t$ を用いると，固有加速度は

$$a^\mu(r) \equiv u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{GM}{r^2}(\partial_r)^\mu \tag{3.51}$$

となる．さらに，固有加速度 $a^\mu(r) = 0$ でブラックホールに向かって自由落下している観測者 (FFO: freely falling observer) を考えると，FFO から見た FIDO の固有相対加速度の大きさは

$$a(r) \equiv \sqrt{a^\mu(r)\,a_\mu(r)} = \frac{GM}{r^2}\sqrt{g_{rr}(r)} = \frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.52}$$

となる．

さて，FFO は自由落下しているため，等価原理より FFO の近傍は局所的に Minkowski 時空とみなすことができる．このとき，ホライズン近傍 ($r \sim r_{\rm H} = 2GM$) にいる FFO にとって，その周りの Minkowski 時空における物質場が真空状態にあると仮定する．すると，Unruh 効果の議論から，ホライズン近傍の FFO は粒子を観測しないが，その FFO に対して (3.52) で与えられる大きさで加速運動している FIDO は，局所固有温度

$$T = \lim_{r\to r_{\rm H}} \frac{\hbar\, a(r)}{2\pi} = \frac{\hbar}{8\pi GM} \lim_{r\to r_{\rm H}} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.53}$$

の熱浴にいるかのように感じる．この局所温度は発散しているが，時間的 Killing ベクトル ∂_t に関する温度（無限遠方の観測者の固有温度）に換算すると

$$T_0 = \lim_{r\to r_{\rm H}} \frac{\hbar\, a(r)}{2\pi}\sqrt{-g_{tt}(r)} = \frac{\hbar}{8\pi GM} \tag{3.54}$$

という有限の温度が得られる．これは **Hawking 温度**と呼ばれ，表面重力 $\kappa = 1/(4\,GM)$ を用いると

$$T_{\rm H} = \frac{\hbar\, c^3\, \kappa}{2\pi\, k_{\rm B}} \tag{3.55}$$

と表すことができる（光速と Boltzmann 定数をあらわに記した）．こうして，無限遠方にいる FIDO は Hawking 温度の熱浴にいるかのように感じることが分かった．

3.3 Unruh 検出器

前節までの議論により，ホライズンを持つ時空に置かれた量子場が熱的性質を持つことが理解できたと思う．本節では，実際にこの現象がどのように観測

されるかについて，Unruh による思考実験をもとにして議論する*5)．

3.3.1 思考実験のセットアップ

d 次元背景時空 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$ において，真空状態 $|\Omega\rangle$ のスカラー場 $\phi(x) = \phi(t, \boldsymbol{x})$ を考える．いま，ある時刻 t_1 において，この真空中に小さな検出器（**Unruh 検出器**）を置いてみる．ただし，この検出器とスカラー場との間には，弱いが 0 でない相互作用があると仮定する．また検出器は（小さいが）十分重いため，検出器の運動は古典的な質点の軌道 $x^\mu(\tau)$ で表されるとする．ここで τ は軌道の固有時間である（図 3.5）*6)．

全体系の Hilbert 空間 $\mathcal{H}^{\mathrm{tot}}$ は，検出器の Hilbert 空間 $\mathcal{H}^{\mathrm{d}}$ とスカラー場の Hilbert 空間 $\mathcal{H}^{\phi}$ のテンソル積として表される：

$$\mathcal{H}^{\mathrm{tot}} = \mathcal{H}^{\mathrm{d}} \otimes \mathcal{H}^{\phi}. \tag{3.56}$$

全体系のハミルトニアンは Schrödinger 描像で

$$H^{\mathrm{tot}}(t) = H^{\mathrm{d}}\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \otimes 1 + 1 \otimes H^{\phi}(t) + V(t) \tag{3.57}$$

の形に書ける．ここで，H^{d} は固有時を用いたときの検出器のハミルトニアンであり，H^{ϕ} は自由スカラー場のハミルトニアンである．以下，H^{d} は時間によらないとし，その固有値と固有状態をそれぞれ E_m, $|m\rangle$ と書く：$H^{\mathrm{d}}\,|m\rangle = E_m\,|m\rangle$．相互作用項 $V(t)$ については，次の形の単極子相互作用（場の空間微分を含まない相互作用）であるとする：

$$V(t) = \lambda\,\mu\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \otimes \phi(\boldsymbol{x}(t))\,\theta(t - t_1). \tag{3.58}$$

ここで $\mu = \sum_{m,n} \mu_{mn} |m\rangle\langle n| \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}^{\mathrm{d}}$ は検出器固有の演算子であり（何で

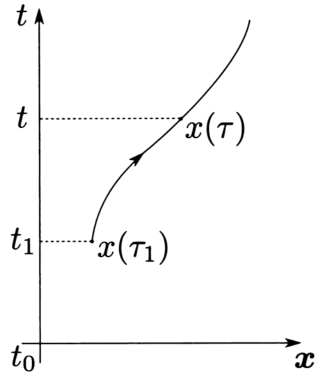


図 3.5 Unruh 検出器の軌跡.

*5) 本節の議論は，文献 [29] に基づく．

*6) Unruh 検出器の軌跡 $x^\mu(\tau) = \big(t(\tau), \boldsymbol{x}(\tau)\big)$ は τ を消去することにより，空間座標と時間座標の間の関係 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ としても書けることに注意せよ．

も良い)，λ は相互作用の強さを指定する無次元の微小パラメーターである．

さて，運動している検出器がスカラー場の真空状態 $|\Omega\rangle$ をどのように感じるかは，検出器の状態密度の分布の時間変化を調べれば分かる．例えば，検出器の密度分布が固有時刻 τ_1 で $\{\rho_n\}$ だったとしよう．検出器はスカラー場と相互作用するため，検出器の密度行列 $\rho(\tau)$ は，初期条件 $\rho(\tau_1) = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ のもとで時間発展していく．もしこの密度行列が十分時間がたった後に

$$\rho(\tau) \to \frac{1}{Z_\beta}\, \mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{d}}} \quad \left(Z_\beta \equiv \mathrm{tr}_{\mathrm{d}}\, \mathrm{e}^{-\beta H^{\mathrm{d}}}\right) \tag{3.59}$$

の形に漸近するとすれば，検出器は，あたかも自身が温度 $1/\beta$ の熱浴に接触しているように振る舞うことになる．つまり，検出器はスカラー場の真空状態 $|\Omega\rangle$ を温度 $1/\beta$ の熱的状態であると感じる．

3.3.2 縮約された密度行列とマスター方程式

検出器の密度行列の時間発展を調べるため，まず全体系の密度行列 $\rho^{\mathrm{tot}}(t)$ の時間発展を考える．これは次の **von Neumann 方程式**で記述される：

$$\rho^{\mathrm{tot}}(t) = U^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\, \rho^{\mathrm{tot}}(t_1) \left[U^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\right]^{-1}. \tag{3.60}$$

ここで $U^{\mathrm{tot}}(t, t_1)$ は Schrödinger 描像における時間発展演算子である：

$$U^{\mathrm{tot}}(t, t_1) \equiv \mathrm{T} \exp\!\left(-\mathrm{i} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, H^{\mathrm{tot}}(t')\right). \tag{3.61}$$

また，時刻 t_1 以前には検出器とスカラー場との間に相互作用が無かったとすれば，初期条件は

$$\rho^{\mathrm{tot}}(t_1) \equiv \rho^{\mathrm{d}}(t_1) \otimes \rho^{\phi}(t_1) \tag{3.62}$$

として与えてよいはずである．ここで，$\rho^{\mathrm{d}}(t_1) = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ は検出器の密度行列である．また，$\rho^{\phi}(t_1)$ は時刻 t_1 におけるスカラー場の状態である．とくに，スカラー場が真空状態 $|\Omega\rangle$ にあるときには，$\rho^{\phi}(t_1) = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ とすればよい．

さて，検出器の状態しか観測しない場合には（例えば μ の行列要素 $\mu_{mn} = \langle m|\mu|n\rangle$ だけしか考えない場合)，スカラー場の状態をすべて足しあげてしまってよい．すると，検出器の密度行列 $\rho(t)$ が全密度行列 $\rho^{\mathrm{tot}}(t)$ の**縮約された密度行列**として得られる：

$$\rho(t) \equiv \mathrm{tr}_\phi\, \rho^{\mathrm{tot}}(t). \tag{3.63}$$

このとき，$\rho(t)$ の初期条件は，$\rho^{\mathrm{tot}}(t)$ の初期条件 (3.62) から，$\rho(t_1) = \mathrm{tr}_\phi\, \rho^{\mathrm{tot}}(t_1) = \rho^{\mathrm{d}}(t_1) = \sum_n \rho_n |n\rangle\langle n|$ として与えられる．

全体系の状態 $\rho^{\mathrm{tot}}(t)$ の時間発展が初期条件 (3.62) のもとで一意に決まっているため，縮約された密度行列の時間発展も一意に決まっているはずである．

これをあらわに見るには，相互作用描像に移るのが便利である．

まず全体系のハミルトニアンを

$$H^{\mathrm{tot}}(t) = H_0^{\mathrm{tot}}(t) + V(t)\,, \tag{3.64}$$

$$H_0^{\mathrm{tot}}(t) \equiv H^{\mathrm{d}}\,\frac{\mathrm{d}\tau(t)}{\mathrm{d}t} \otimes 1 + 1 \otimes H^{\phi}(t) \tag{3.65}$$

のように分解し，$V(t)$ を摂動として扱う．このとき，時間発展演算子 $U^{\mathrm{tot}}(t, t_1)$ は，次のように，無摂動部分と摂動部分の積になる：

$$U^{\mathrm{tot}}(t, t_1) = U_0^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\, U_I^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\,, \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned} U_0^{\mathrm{tot}}(t, t_1) &\equiv \mathrm{T}\exp\Bigl(-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, H_0^{\mathrm{tot}}(t')\Bigr) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{d}}\cdot(\tau-\tau_1)} \otimes \mathrm{T}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t' H^{\phi}(t')}\,, \end{aligned} \tag{3.67}$$

$$U_I^{\mathrm{tot}}(t, t_1) \equiv \mathrm{T}\exp\Bigl(-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, V_I(t')\Bigr)\,. \tag{3.68}$$

$V_I(t)$ は相互作用描像における相互作用項である：

$$\begin{aligned} V_I(t) &\equiv \bigl[U_0^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\bigr]^{-1}\, V(t)\, U_0^{\mathrm{tot}}(t, t_1) \\ &= \lambda\,\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\,\mu_I(\tau) \otimes \phi_I\bigl(x(\tau)\bigr)\,\theta(t - t_1)\,. \end{aligned} \tag{3.69}$$

ここで，$\mu_I(\tau)$ は

$$\begin{aligned} \mu_I(\tau) &\equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{d}}\cdot(\tau-\tau_1)}\ \mu\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{d}}\cdot(\tau-\tau_1)} \\ &= \sum_{m,n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(E_m - E_n)(\tau-\tau_1)}\ \mu_{mn}\,|m\rangle\langle n| \end{aligned} \tag{3.70}$$

で定義され，また，演算子

$$\begin{aligned} \phi_I\bigl(x(\tau)\bigr) &= \phi_I\bigl(t, \boldsymbol{x}(t)\bigr) \\ &\equiv \bigl[\mathrm{T}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,H^{\phi}(t')}\bigr]^{-1}\,\phi\bigl(\boldsymbol{x}(t)\bigr)\,\mathrm{T}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,H^{\phi}(t')} \end{aligned} \tag{3.71}$$

は，自由スカラー場の運動方程式（Klein–Gordon 方程式）を満たす．このとき，相互作用描像における縮約された密度行列は，

$$\begin{aligned} \rho_I^{\mathrm{tot}}(t) &\equiv \bigl[U_0^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\bigr]^{-1} \rho^{\mathrm{tot}}(t)\, U_0^{\mathrm{tot}}(t, t_1) \\ &= U_I^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\, \rho^{\mathrm{tot}}(t_1)\, \bigl[U_I^{\mathrm{tot}}(t, t_1)\bigr]^{-1} \end{aligned} \tag{3.72}$$

と表され，次の von Neumann 方程式を満たす：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = -\,\mathrm{i}\,[V_I(t),\, \rho_I^{\mathrm{tot}}(t)] \equiv -\mathrm{i}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)}\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)\,. \tag{3.73}$$

この von Neumann 方程式は，**射影演算子の方法**（例えば [30]）を用いると，$\rho_I(t) \equiv \mathrm{tr}_{\phi}\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)$ だけを含む方程式に書き直すことができる（証明は付録 E

を見よ）：

$$\frac{\mathrm{d}\rho_I(t)}{\mathrm{d}t} \otimes \rho_I^\phi(t_1)$$
$$= -\mathcal{P}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\,\mathrm{T}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t''\,\mathcal{Q}\,\mathrm{ad}_{V_I(t'')}}\,\mathrm{ad}_{V_I(t')}\big(\rho_I(t') \otimes \rho_I^\phi(t_1)\big)\,. \tag{3.74}$$

ここで，$\mathcal{P}$ は $\mathrm{End}\,\mathcal{H}^{\mathrm{tot}}$ （$= \mathcal{H}^{\mathrm{tot}}$ 上の線形演算子全体）に作用する線形演算子

$$\mathcal{P}:\, O \,\mapsto\, \mathcal{P}O \equiv (\mathrm{tr}_\phi\, O) \otimes \rho_I^\phi(t_1) \quad \big(O \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}^{\mathrm{tot}}\big) \tag{3.75}$$

である．$\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ を満たす射影になっていることは，$\mathrm{tr}_\phi\,\rho_I^\phi(t_1) = 1$ からすぐに分かる．また，$\mathcal{Q} \equiv 1-\mathcal{P}$ は $\mathcal{P}$ の直交射影である：$\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}, \mathcal{P}\mathcal{Q} = 0 = \mathcal{Q}\mathcal{P}$．この (3.74) 式が，$\rho_I(t)$ の時間発展を完全に記述する**マスター方程式**である．

3.3.3　マスター方程式の近似

マスター方程式 (3.74) を λ の 2 次まで展開すると，次が得られる：

$$\frac{\mathrm{d}\rho_I(t)}{\mathrm{d}t} = -\,\mathrm{tr}_\phi\Big(\mathrm{ad}_{V_I(t)} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\,\mathrm{ad}_{V_I(t')}\big(\rho_I(t') \otimes \rho_I^\phi(t_1)\big)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^3)\,. \tag{3.76}$$

以下，すべての量を固有時間 $\tau = \tau(t)$ で表し，ドットを τ に関する微分であるとすると，次の式が得られる：

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_I(\tau) =&\; -\lambda^2 \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{d}\tau'\;\mathrm{tr}_\phi\Big[\mu_I(\tau)\otimes\phi_I\big(x(\tau)\big),\\ &\qquad\qquad \big[\mu_I(\tau')\otimes\phi_I\big(x(\tau')\big),\,\rho_I(\tau')\otimes\rho_I^\phi(\tau_1)\big]\Big] + \mathcal{O}(\lambda^3)\\ =&\; \lambda^2 \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{d}\tau'\Big(\big[\mu_I(\tau),\,\rho_I(\tau')\,\mu_I(\tau')\big]\,G^+\big(x(\tau'),x(\tau)\big)\\ &\qquad - \big[\mu_I(\tau),\,\mu_I(\tau')\,\rho_I(\tau')\big]\,G^+\big(x(\tau),x(\tau')\big)\Big) + \mathcal{O}(\lambda^3)\,.\end{aligned} \tag{3.77}$$

ここで，$G^+(x,x')$ は状態 $X^\phi = \rho_I^\phi(\tau_1)$ に対するスカラー場の Wightman 関数である：

$$G^+(x,x') \equiv \mathrm{tr}_\phi\big(\phi_I(x)\,\phi_I(x')\,X^\phi\big) = \mathrm{tr}_\phi\big(\phi_I(x)\,\phi_I(x')\,\rho_I^\phi(\tau_1)\big)\,. \tag{3.78}$$

相互作用描像における縮約された密度行列 $\rho_I(t)$ は Schrödinger 描像のもの $(\rho(t))$ と

$$\rho_I(\tau) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{\mathrm{d}}\cdot(\tau-\tau_1)}\;\rho(\tau)\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{\mathrm{d}}\cdot(\tau-\tau_1)} \tag{3.79}$$

と関係しているため，(3.77) は Schrödinger 描像において次の形をとる：

$$
\begin{aligned}
&\dot{\rho}(\tau) + \mathrm{i}\,[H^{\mathrm{d}}, \rho(\tau)] \\
&= \lambda^2 \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{d}\tau' \big[\mu\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, \rho(\tau')\, \mu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, G^{+}\big(x(\tau'), x(\tau)\big) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, \mu\, \rho(\tau')\, \mu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big) \\
&\qquad - \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, \rho(\tau')\, \mu\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, \mu\, G^{+}\big(x(\tau'), x(\tau)\big) \\
&\qquad - \mu\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, \mu\, \rho(\tau')\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} H^{\mathrm{d}} \cdot (\tau-\tau')}\, G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big)\big] + \mathcal{O}(\lambda^3)\,.
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

これは，行列要素で表せば，

$$
\begin{aligned}
&\dot{\rho}_{mn}(\tau) + \mathrm{i}(E_m - E_n)\rho_{mn}(\tau) \\
&= \lambda^2 \sum_{k,l} \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{d}\tau' \big[\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_n - E_k)(\tau'-\tau)}\, \mu_{mk}\, \mu_{ln}\, \rho_{kl}(\tau')\, G^{+}\big(x(\tau'), x(\tau)\big) \\
&\qquad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_m - E_l)(\tau-\tau')}\, \mu_{mk}\, \mu_{ln}\, \rho_{kl}(\tau')\, G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big) \\
&\qquad - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_l - E_m)(\tau'-\tau)}\, \mu_{kl}\, \mu_{ln}\, \rho_{mk}(\tau')\, G^{+}\big(x(\tau'), x(\tau)\big) \\
&\qquad - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_k - E_n)(\tau-\tau')}\, \mu_{mk}\, \mu_{kl}\, \rho_{ln}(\tau')\, G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big)\,\big] + \mathcal{O}(\lambda^3)
\end{aligned}
\tag{3.81}
$$

である．

(3.81) 式は $\rho_{mn}(t)$ に関する微分積分方程式であり，一般的な解析をするのは大変に難しい．しかし，Wightman 関数 $G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big)$ が一般に $\tau' = \tau$ でのみ特異的であり，また τ が τ' から離れるに従って指数関数的に減少することに注意すると，積分に対する主な寄与は $\tau' \sim \tau$ のみにあることが分かり，積分中の $\rho_{kl}(\tau')$ をその境界値 $\rho_{kl}(\tau)$ で置き換えることができる．また，多くの場合，非対角成分は対角成分に比べて小さいため，対角成分のみ残せば，マスター方程式は次の形になる：

$$
\dot{\rho}_{mm}(\tau) = \sum_{k \neq m} \big[w_{mk}(\tau, \tau_1)\, \rho_{kk}(\tau) - w_{km}(\tau, \tau_1)\, \rho_{mm}(\tau)\big]\,. \tag{3.82}
$$

ここで $w_{mk}(\tau, \tau_1)$ は単位時間当たりの遷移確率であり，

$$
\begin{aligned}
w_{mk}(\tau, \tau_1) &\equiv \lambda^2\, |\mu_{mk}|^2 \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{d}\tau' \Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau'-\tau)}\, G^{+}\big(x(\tau'), x(\tau)\big) \\
&\qquad\qquad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau-\tau')}\, G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big)\Big] \\
&\equiv \lambda^2\, |\mu_{mk}|^2\, \dot{\mathcal{F}}(E_m - E_k; \tau, \tau_1)
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

と表される．また，

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{F}}(\Delta E; \tau, \tau_1) \equiv \int_{\tau_1}^{\tau} \mathrm{d}\tau' \Big[&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau'-\tau)}\, G^{+}\big(x(\tau'), x(\tau)\big) \\
&+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau-\tau')}\, G^{+}\big(x(\tau), x(\tau')\big)\Big]
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

は多くの文献で**微分応答関数**と呼ばれているものである．方程式系 (3.82)–(3.84)

は摂動の最低次の近似であるが，通常，これを解くだけで十分な情報を得ることができる．

さて，密度分布の長時間極限は，(3.82) 式の左辺を 0 と置き，**詳細釣り合いの原理**を適用することで評価できる．とくに，微分応答関数の極限値：$\dot{\mathcal{F}}^{\mathrm{eq}}(\Delta E) \equiv \lim_{\tau-\tau_1\to\infty} \dot{\mathcal{F}}(\Delta E;\tau;\tau_1)$ が関係式

$$\frac{\dot{\mathcal{F}}^{\mathrm{eq}}(\Delta E)}{\dot{\mathcal{F}}^{\mathrm{eq}}(-\Delta E)} = \mathrm{e}^{-\beta\Delta E} \tag{3.85}$$

を満たす場合には，単位時間あたりの遷移確率は，関係式

$$\frac{w_{mk}(\tau;\tau_1)}{w_{km}(\tau;\tau_1)} \xrightarrow{\tau-\tau_1\to\infty} \mathrm{e}^{-\beta(E_m-E_k)} \tag{3.86}$$

を満たす．従って，詳細釣り合いの原理

$$\lim_{\tau-\tau_1\to\infty} w_{mk}(\tau;\tau_1)\,\rho^{\mathrm{eq}}_{kk} = \lim_{\tau-\tau_1\to\infty} w_{km}(\tau;\tau_1)\,\rho^{\mathrm{eq}}_{mm} \tag{3.87}$$

より，平衡状態における密度分布が，

$$\rho^{\mathrm{eq}}_{mm} = \frac{\mathrm{e}^{-\beta E_m}}{Z} \quad \left(Z = \sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n}\right) \tag{3.88}$$

という温度 $1/\beta$ の Gibbs 分布になることが分かる．つまりこの場合には，検出器はあたかも自身が温度 $1/\beta$ の熱浴中にいるかのように感じる．

3.3.4 例

上記の一般論をいくつかの例で調べてみよう．以下，簡単のため，検出器は十分過去に作動させているとして $\tau_1 = -\infty$ と置く．このとき，微分応答関数は

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{F}}(\Delta E;\tau) &\equiv \dot{\mathcal{F}}(\Delta E;\tau,\tau_1=-\infty)\\ &= \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau' \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau-\tau')}\, G^+\big(x(\tau),x(\tau')\big) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau'-\tau)}\, G^+\big(x(\tau'),x(\tau)\big)\right]\end{aligned} \tag{3.89}$$

と書ける．とくに，$G^+\big(x(\tau),x(\tau')\big)$ が固有時間の差の関数になっているとき，つまり，$G^+\big(x(\tau),x(\tau')\big) = g(\tau-\tau')$ の形のときには，微分応答関数は τ によらなくなり，

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{F}}(\Delta E) &= \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\tau' \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau-\tau')}\, g(\tau-\tau') + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E(\tau'-\tau)}\, g(\tau'-\tau)\right]\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}s\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E\, s}\, g(s)\end{aligned} \tag{3.90}$$

となる．

3.3.4.1 Minkowski 時空

Minkowski 時空中における質量 m のスカラー場の Wightman 関数は

$$G^+(x,x') = \frac{m^{(d-2)/2}}{(2\pi)^{d/2}\,\sigma_+^{(d-2)/4}}\,K_{\frac{d-2}{2}}(m\sigma_+) \tag{3.91}$$

で与えられる．ここで，$x=(t,\boldsymbol{x})$, $x'=(t',\boldsymbol{x}')$ に対して

$$\sigma_\pm(x,x') \equiv -(t-t'\mp \mathrm{i}0)^2 + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2 \tag{3.92}$$

である．以下簡単のために，とくにゼロ質量の場合を考える．このときの Wightman 関数は，上式で $m\to 0$ の極限をとれば分かるように，

$$G^+(x,x') = \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{\sigma_+^{\frac{d-2}{2}}} \tag{3.93}$$

である．

例 1: Minkowski 時空内の等速直線運動

検出器の運動が Minkowski 時空の測地線となっているとき，その軌跡は速度ベクトルを $u^\mu=(1/\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2},\ \boldsymbol{v}/\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2})$ として

$$t(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}}, \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \frac{\boldsymbol{v}\,\tau}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}} \tag{3.94}$$

と書ける．このとき，

$$\sigma_+\big(x(\tau),x(\tau')\big) = -(\tau-\tau')^2 + \mathrm{i}0(\tau-\tau') = -(\tau-\tau'-\mathrm{i}0)^2 \tag{3.95}$$

であるので，Wightman 関数 $G\big(x(\tau),x(\tau')\big)$ は $s=\tau-\tau'$ の関数となり，

$$g(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{\left[-(s-\mathrm{i}0)^2\right]^{\frac{d-2}{2}}} \tag{3.96}$$

を用いて，微分応答関数は (3.90) の形に書ける．これは一般の d に対して計算できるが，とくに，偶数次元 $(d=2n)$ の場合を考えてみよう．このとき，微分応答関数は

$$\dot{\mathcal{F}}(\Delta E) = \frac{(-1)^{n-1}\,\Gamma(n-1)}{4\pi^n}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E\,s}\,\frac{1}{(s-\mathrm{i}0)^{n-1}} \tag{3.97}$$

となり，原点付近の虚軸上に $(n-1)$ 次の極があることが分かる．Jordan の補助定理を用いると，ΔE の正負に応じて下半平面あるいは上半平面に経路を付け加えて閉じた経路にすることができるが，$\Delta E>0$ のときには下半平面に極がないことより，

$$\dot{\mathcal{F}}(\Delta E) = 0 \quad (\Delta E>0) \tag{3.98}$$

となることが分かる．この式と (3.83) 式より，結局，検出器が等速直線運動す

るときには，検出器には熱的励起が起こらないことが分かる．なお，このことは一般の次元と任意の質量の場合にも成立する．

例 2: Minkowski 時空内の等加速度運動

次に，検出器が大きさ a で等加速度運動する場合を考えよう．適当に空間座標を回転させて $z = x^{d-1}$ 座標を加速度の方向に合わせれば，検出器の軌跡は，

$$t(\tau) = \frac{1}{a}\sinh a\tau\,, \quad z(\tau) = \frac{1}{a}\cosh a\tau\,, \tag{3.99}$$

$$x^i(\tau) = 0 \quad (i = 1, \ldots, d-2)\,, \tag{3.100}$$

と表される．このとき，容易に分かるとおり，

$$\sigma_+\bigl(x(\tau), x(\tau')\bigr) = -\frac{4}{a^2}\sinh^2\frac{a(s-\mathrm{i}0)}{2} \tag{3.101}$$

となるため，今回も Wightman 関数 $G\bigl(x(\tau), x(\tau')\bigr)$ は $s = \tau - \tau'$ の関数となり，

$$g(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{-a^2}{4}\right)^{\frac{d-2}{2}}\frac{1}{\sinh^{d-2}\left(\frac{a(s-\mathrm{i}0)}{2}\right)} \tag{3.102}$$

を用いて，微分応答関数は (3.90) の形に書ける．

とくに $d = 4$ の場合を考えてみよう．このとき，公式

$$\frac{1}{\sinh^2 z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z - \mathrm{i}\pi n)^2} \tag{3.103}$$

を用いれば，

$$\dot{\mathcal{F}}(\Delta E) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta E\, s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{s - \mathrm{i}\,\frac{2\pi n}{a} - \mathrm{i}0} \tag{3.104}$$

と書けるが，これも図 3.6 に対して Jordan の補助定理を使うことにより，ΔE の正負にかかわらず，

$$\dot{\mathcal{F}}(\Delta E) = \frac{\Delta E}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-(2\pi/a)\Delta E}}{1 - \mathrm{e}^{-(2\pi/a)\Delta E}} \tag{3.105}$$

となることが容易に分かる．これは，次の関係式

$$\frac{\dot{\mathcal{F}}(\Delta E)}{\dot{\mathcal{F}}(-\Delta E)} = \mathrm{e}^{-(2\pi/a)\Delta E} \tag{3.106}$$

を満たすため，(3.85) 式とそれに続く議論により，検出器の密度分布は初期値に寄らず，温度 $T = 1/\beta = a/2\pi$ の Gibbs 分布に近づくことが分かる．つまり検出器はあたかも自身が固有温度 $T = a/2\pi$ の熱浴に静止しているかのように振る舞う．

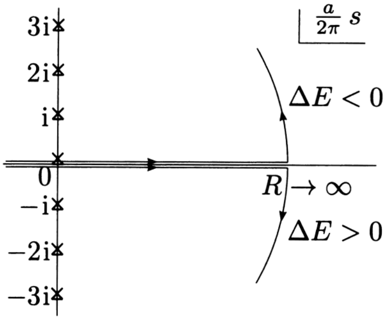


図 3.6 被積分関数の極. ΔE の正負に応じて，下半平面あるいは上半平面に経路を付け加えて閉じた経路にすることができる.

3.3.4.2 de Sitter 時空

前小節では，Minkowski 時空中の検出器の運動について，その運動が測地線（等速直線運動）のときは熱的励起がないが，等加速度運動のときには熱的に励起し，密度分布が温度 = 加速度$/2\pi$ の Boltzmann 分布になることを確認した.

本小節では，de Sitter 時空の場合では，検出器の運動が測地線になっていても密度分布が Gibbs 分布になることを示す. 以下，d 次元 de Sitter 時空の Poincaré 座標領域

$$\mathrm{d}s^2 = \ell^2\,\frac{-\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2}{\eta^2} \quad (-\infty<\eta<0) \tag{3.107}$$

において，スカラー場が Bunch–Davies 真空 $|\mathrm{BD}\rangle$ の状態にあり，検出器が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ に静止し続けている場合を考える：

$$X^{\phi} = |\mathrm{BD}\rangle\langle\mathrm{BD}|\,, \tag{3.108}$$

$$\eta(\tau) = -\ell\,\mathrm{e}^{-\tau/\ell}, \quad \boldsymbol{x}(\eta)=0\,. \tag{3.109}$$

容易に分かるとおり，この軌跡は τ を固有時間とした測地線になっている.

これに対する微分応答関数を求めるのは少々大変だが，次の結果になることが知られている [29]：

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{F}}(\Delta E) &= \frac{\mathrm{e}^{-\pi\ell\Delta E}}{8\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)} \\ &\quad\times\Gamma\Big(\frac{d-1+2(\nu+\mathrm{i}\ell\Delta E)}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{d-1+2(-\nu+\mathrm{i}\ell\Delta E)}{4}\Big) \\ &\quad\times\Gamma\Big(\frac{d-1+2(\nu-\mathrm{i}\ell\Delta E)}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{d-1-2(\nu+\mathrm{i}\ell\Delta E)}{4}\Big) \\ &\quad\left(\nu\equiv\sqrt{\Big(\frac{d-1}{2}\Big)^2-m^2\ell^2}\right).\end{aligned} \tag{3.110}$$

これは，次の関係式

$$\frac{\dot{\mathcal{F}}(\Delta E)}{\dot{\mathcal{F}}(-\Delta E)} = \mathrm{e}^{-2\pi\ell\Delta E} \tag{3.111}$$

を満たすため，(3.85) 式とそれに続く議論により，検出器の密度分布は初期値に寄らず，温度 $T = 1/\beta = 1/(2\pi\ell)$ の Boltzmann 分布に近づくことが分かる．つまり検出器はあたかも自身が温度 $T = 1/(2\pi\ell)$ の熱浴に静止しているかのように振る舞う．

注：Bunch–Davies 真空について

de Sitter 時空の Poincaré 座標領域は大域的な時間的 Killing ベクトルを持たないため，ハミルトニアンは時間に陽に依存する：$H = H(\eta)$．その結果，基底状態をすべての η で共通のものとして定義することはできず，各 η ごとに，$H(\eta)$ の瞬間的基底状態 $(\equiv |0_\eta\rangle)$ が導入できるだけである．文献 [25] で詳しく調べられたように，Bunch–Davies 真空 $|\mathrm{BD}\rangle$ は無限の過去での基底状態に対応している：

$$|\mathrm{BD}\rangle = \lim_{\eta\to-\infty} |0_\eta\rangle\,. \tag{3.112}$$

Unruh–DeWitt 検出器の解析において，Bunch–Davies 真空を有限の過去の基底状態 $|0_{\eta_0}\rangle$ $(-\infty < \eta_0 < 0)$ に置き換えると，実は検出器はあたかも（一定温度の熱浴にいるのではなく）非平衡状態の媒質の中にいるように振る舞い，その媒質自身は有限の緩和時間で Bunch–Davies 真空に対応した平衡状態に緩和していく [29]．この緩和時間は，検出器の物性や場の種類によらず，普遍的に $\ell/2$ で与えられ，de Sitter 時空固有の非平衡熱力学的特徴を表す量であると考えられている．

第 4 章
重力理論の正準形式と時空の熱力学

本章の前半では，重力理論の正準形式の立場から様々な保存量を定義し，それが時刻一定面の境界における表面積分として表されることを示す．また，後半では，時空を Euclid 化するテクニックを用いることで，ブラックホールの温度やエントロピーなど，様々な熱力学量を定義する．

4.1　重力理論の正準形式と保存電荷

この節では，曲がった時空におけるエネルギーや角運動量などの保存量を，正準形式を用いて定義する．そして，それが無限遠方にある境界上の空間積分として与えられることを確認する．

4.1.1　重力理論の Lagrange 形式と Gibbons–Hawking 項

本小節では，重力理論の正準形式を議論する準備として，境界を持つ時空 $\mathcal{M}$ における重力理論の作用を決定する．なお，ここで扱う d 次元時空 $\mathcal{M}$ は，図 4.1 にあるような，時間的または空間的な境界 $\partial\mathcal{M}$ を持つとする．また，$\partial\mathcal{M}$ 全体において $n^2 = \varepsilon(n) \equiv \pm 1$ を満たす単位法ベクトル n^μ を導入し，射影テンソルを $\mathsf{h}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \varepsilon(n)\, n^\mu\, n^\nu$ で定義する．

以下では，次のことを示す：

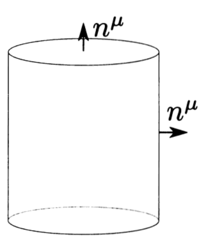


図 4.1　ここで扱う時空と単位法ベクトル n^μ.

(1) （宇宙項を含む）Einstein–Hilbert 作用

$$S_{\rm EH} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} {\rm d}^d x\sqrt{-g}\,(R-2\,\Lambda) \tag{4.1}$$

の変分は，次の形をとる（A^μ, $\mathrm{B}^{\mu\nu}$：あるテンソル場）：

$$\begin{aligned}\delta S_{\rm EH} = &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} {\rm d}^d x\,\sqrt{-g}\left[R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,(R-2\,\Lambda)\,g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}\\ &+\int_{\partial\mathcal{M}} {\rm d}S[n]\,\varepsilon(n)\,\left[\mathrm{A}^\mu\,\mathsf{h}^{\nu\sigma}\,\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu}+\mathrm{B}^{\mu\nu}\,n^\rho\,\nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}\right].\end{aligned} \tag{4.2}$$

このことは，境界 $\partial\mathcal{M}$ で計量を固定するという Dirichlet 境界条件（$\partial\mathcal{M}$ 上で $\delta g_{\mu\nu}=0$）を課しても，$S_{\rm EH}$ の変分には $n^\mu\,\partial_\mu\delta g_{\rho\sigma}$ に比例する余分な境界項が残り*1)，変分問題から Einstein 方程式が導けないことを意味する．

(2) 以下の **Gibbons–Hawking 項** [31], [32] と呼ばれる境界項

$$S_{\rm GH} = \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} {\rm d}^{d-1} x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\mathsf{K}$$
$$\left(\sqrt{|\mathsf{h}|}\equiv\sqrt{|\det(\mathsf{h}_{\mathsf{ij}})|},\quad \mathsf{K}\equiv\nabla_\mu n^\mu\right) \tag{4.3}$$

を作用に加えれば，正しく Einstein 方程式が導けるようになる．ここで，h_{ij} は $\partial\mathcal{M}$ 上の誘導計量，K は $\partial\mathcal{M}$ の外部曲率のトレースである．実際，以下で示すように，Gibbons–Hawking 項を加えた作用 $S_{\rm EH+GH}\equiv S_{\rm EH}+S_{\rm GH}$ の変分は

$$\begin{aligned}\delta S_{\rm EH+GH} = &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} {\rm d}^d x\,\sqrt{-g}\left[R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,(R-2\,\Lambda)\,g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu}\\ &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} {\rm d}^{d-1} x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\mathrm{C}^{\mathsf{ij}}\,\delta\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}\end{aligned} \tag{4.4}$$

という形になり，$\partial\mathcal{M}$ 上の誘導計量 h_{ij} を固定すれば $\delta\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}=0$ なので，作用の変分問題から Einstein 方程式が正しく導けるようになる．

なお，こうして得られる作用 $S_{\rm EH+GH}$ は Dirichlet 変分問題から Einstein 方程式が導ける唯一の作用ではなく，より一般には境界上の誘導計量 h_{ij} のみに依存する境界項 $S_0[\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}]$ を加える任意性がある．$S_0[\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}]$ の具体的な選び方は後で説明するが，以下では，この境界項も含めた作用

$$\begin{aligned}S_{\rm grav} &\equiv S_{\rm EH+GH}+S_0[\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}]\\ &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} {\rm d}^d x\sqrt{-g}\,(R-2\,\Lambda)\\ &\quad+\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} {\rm d}^{d-1} x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\mathsf{K}+S_0[\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}]\end{aligned} \tag{4.5}$$

を Einstein 重力理論の作用として用いる．

---

*1） 境界 $\partial\mathcal{M}$ の接方向の微分 $\mathsf{h}^{\nu\sigma}\,\partial_\sigma\delta g_{\mu\nu}$ は Dirichlet 境界条件のもとでは消える．

(1) と (2) の確認

まず，**(1)** は公式 (A.26) を用いて示され，

$$\begin{aligned}\delta S_{\rm EH} &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\Big[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,(R - 2\,\Lambda)\,g^{\mu\nu}\Big]\,\delta g_{\mu\nu}\\ &\quad + \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}S[n]\,\varepsilon(n)\,n_\mu\,\big(g^{\mu\rho}\,\nabla^\nu\delta g_{\rho\nu} - g^{\rho\nu}\,\nabla^\mu\delta g_{\rho\nu}\big)\\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\big(G^{\mu\nu} + \Lambda\,g^{\mu\nu}\big)\,\delta g_{\mu\nu}\\ &\quad + \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}S[n]\,\varepsilon(n)\,\big(n^\mu\,\mathsf{h}^{\nu\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} - \mathsf{h}^{\rho\nu}\,n^\mu\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu}\big)\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる．これは，確かに (4.2) の形をしている．

(2) 次に，Gibbons–Hawking 項 (4.3) の変分を計算する．境界 $\partial\mathcal{M}$ を $f(x) =$ 一定面とすると，その単位法ベクトルは

$$n_\mu = \frac{\partial_\mu f}{\sqrt{\varepsilon(n)\,g^{\rho\sigma}\,\partial_\rho f\,\partial_\sigma f}} \tag{4.7}$$

と書けるため，$g_{\mu\nu}$ を変化させたときの n^μ の変分は次のように書ける：

$$\begin{aligned}\delta n_\mu &= \frac{\varepsilon(n)}{2}\,n_\mu\,n^\rho\,n^\sigma\,\delta g_{\rho\sigma}\,,\\ \delta n^\mu &= \delta\big(g^{\mu\nu}\,n_\nu\big) = \frac{\varepsilon(n)}{2}\,n^\mu\,n^\rho\,n^\sigma\,\delta g_{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}\,n^\nu\,\delta g_{\rho\nu}\,.\end{aligned} \tag{4.8}$$

これと (A.22) 式を用いると，K の変分は

$$\begin{aligned}\delta\mathsf{K} = \delta(\nabla_\mu n^\mu) &= \frac{\varepsilon(n)}{2}\,\nabla_\mu\big(n^\mu\,n^\rho\,n^\sigma\,\delta g_{\rho\sigma}\big) - \nabla^\mu\big(n^\nu\,\delta g_{\mu\nu}\big) + \delta\Gamma^\mu_{\mu\rho}\,n^\rho\\ &= -\frac{1}{2}\,\mathsf{K}^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,n^\mu\,\big(\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho}\,\nabla_\mu\delta g_{\nu\rho}\big)\\ &\quad + \mathsf{h}^{\mu\sigma}\,\nabla_\sigma\Big(-\frac{1}{2}\,\mathsf{h}_\mu{}^\nu\,n^\rho\,\delta g_{\nu\rho}\Big)\end{aligned} \tag{4.9}$$

となる．こうして，Gibbons–Hawking 項の変分が

$$\begin{aligned}\delta S_{\rm GH} &= \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\Big(\frac{1}{2}\,\mathsf{K}\,\mathsf{h}^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + \delta\mathsf{K}\Big)\\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\Big[\big(\mathsf{K}^{\mu\nu} - \mathsf{K}\,\mathsf{h}^{\mu\nu}\big)\,\delta g_{\mu\nu}\\ &\qquad\qquad + n^\mu\,\big(\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} - g^{\nu\rho}\,\nabla_\mu\delta g_{\nu\rho}\big)\Big]\\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\big[\big(\mathsf{K}^{\mu\nu} - \mathsf{K}\,\mathsf{h}^{\mu\nu}\big)\,\delta g_{\mu\nu}\big]\\ &\quad - \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}S[n]\,\varepsilon(n)\,\big(n^\mu\,\mathsf{h}^{\nu\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} - \mathsf{h}^{\rho\nu}\,n^\mu\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu}\big)\end{aligned} \tag{4.10}$$

と求まった．2 つ目の等号で，(4.9) 式の最後の項が境界 $\partial\mathcal{M}$ 上の全微分の形

にまとまり，積分すると 0 となることを用いた*2)．また，3 つ目の等号で，積分測度に関する次の関係を用いた（付録 A 参照）：

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}S[n] = \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{-g}\,(\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu\, n^\mu = \int_{\partial\mathcal{M}} \sqrt{|\mathsf{h}|}\,\mathrm{d}^{d-1}x\,. \tag{4.11}$$

(4.6) と (4.10) を合わせると最終行同士が相殺し，従って，作用 $S_{\mathrm{EH+GH}} = S_{\mathrm{EH}} + S_{\mathrm{GH}}$ の変分は

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{EH+GH}} = &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\Big(G^{\mu\nu} + \Lambda\, g^{\mu\nu}\Big)\,\delta g_{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\big(\mathsf{K}^{\mu\nu} - \mathsf{K}\,\mathsf{h}^{\mu\nu}\big)\,\delta g_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{4.12}$$

となって $n^\rho\,\partial_\rho \delta g_{\mu\nu}$ が現れない．さらに，$\big(\mathsf{K}^{\mu\nu} - \mathsf{K}\,\mathsf{h}^{\mu\nu}\big)$ は n_μ と直交するため，$\delta g_{\mu\nu}$ の分解の公式 (1.164) から，第 2 項の $\delta g_{\mu\nu}$ は $e^{\mathsf{i}}_\mu\, e^{\mathsf{j}}_\nu\, \delta\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}$ に置き換えてよく，次を得る：

$$\begin{aligned}\delta S_{\mathrm{EH+GH}} = &-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\,\sqrt{-g}\,\big(G^{\mu\nu} + \Lambda\, g^{\mu\nu}\big)\,\delta g_{\mu\nu} \\ &- \frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\big(\mathsf{K}^{\mathsf{ij}} - \mathsf{K}\,\mathsf{h}^{\mathsf{ij}}\big)\,\delta\mathsf{h}_{\mathsf{ij}}\,.\end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで $\mathsf{K}^{\mathsf{ij}} \equiv e^{\mathsf{i}}_\mu\, e^{\mathsf{j}}_\nu\, \mathsf{K}^{\mu\nu}$ である［(1.170) 参照］．

以上より，$\partial\mathcal{M}$ 上の誘導計量 h_{ij} を固定するという Dirichlet 境界条件のもとで，変分問題から Einstein 方程式が導ける作用が得られた．

4.1.2 重力理論の正準形式

本小節では，上で求めた作用 S_{grav} を用いて重力理論の正準形式を展開する（重力理論の正準形式について詳しく書かれた文献としては [1], [3], [9], [33], [34] などがある）．ここでは，時空 $\mathcal{M}$ の境界 $\partial\mathcal{M}$ を，空間的な曲面と時間的な曲面に分離し，図 4.2 に描かれているように，空間的な曲面（時刻一定面）を Σ_{t_1} および Σ_{t_2} と記し，時間的な曲面を $\mathcal{B}$ と記す．そして，それぞれの超曲面上での法ベクトル n^μ を，u^μ および r^μ と記すことにする*3)：

---

*2) 実際に，(1.168) 式の計量 h_{ij} に関する共変微分 D_{i} を用いると次が示される：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\mathsf{h}^{\mu\sigma}\,\nabla_\sigma\Big(-\frac{1}{2}\,\mathsf{h}_\mu{}^\nu\, n^\rho\,\delta g_{\nu\rho}\Big) \\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\mathsf{h}^{\mathsf{ij}}\, e^\mu_{\mathsf{i}}\, e^\sigma_{\mathsf{j}}\,\nabla_\sigma\big(\mathsf{h}_\mu{}^\nu\, n^\rho\,\delta g_{\nu\rho}\big) \\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{|\mathsf{h}|}\,\varepsilon(n)\,\mathsf{h}^{\mathsf{ij}}\,\mathsf{D}_{\mathsf{j}}\big(e^\nu_{\mathsf{i}}\, n^\rho\,\delta g_{\nu\rho}\big) \\ &= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} \mathrm{d}^{d-1}x\,\varepsilon(n)\,\partial_{\mathsf{i}}\big(\sqrt{|\mathsf{h}|}\,e^{\mathsf{i}\nu}\, n^\rho\,\delta g_{\nu\rho}\big)\,.\end{aligned}$$

*3) ここでは，時刻一定面 Σ_t の法ベクトル u^μ が境界で $\mathcal{B}$ 上の法ベクトル r^μ と直交する場合に限定して議論を行うが，より一般の場合の取り扱いについては [35] を参照せよ．

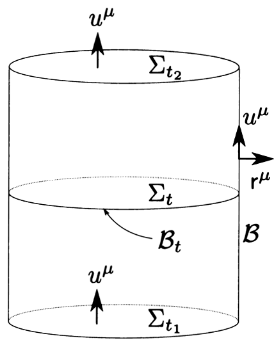


図 4.2　ここで扱う時空の構造.

$$n^\mu = \begin{cases} u^\mu & (\Sigma_t \text{ 上の単位法ベクトル：} u^2 = -1), \\ \mathsf{r}^\mu & (\mathcal{B} \text{ 上の単位法ベクトル：} \mathsf{r}^2 = 1) \end{cases} \tag{4.14}$$

また，それぞれの超曲面における誘導計量 h_{ij} や外部曲率 K_{ij} は次の表にある記号を用いて表すことにする：

一般の境界	空間的超曲面	時間的超曲面	$\mathcal{B}_t \equiv \Sigma_t \cap \mathcal{B}$
境界 $\partial\mathcal{M}$	$\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2}$	$\mathcal{B}$	–
単位法ベクトル n^μ	u^μ(時間的)	r^μ(空間的)	u^μ および r^μ
誘導計量 h_{ij}	h_{ij}	γ_{ab}	$\boldsymbol{\sigma}_{AB}$
外部曲率 $\mathsf{K}_{\mu\nu}$	$K_{\mu\nu}$	$\mathcal{K}_{\mu\nu}$	$k_{\mu\nu}$

ここで，i, j は Σ_t 上の，a, b は $\mathcal{B}$ 上のテンソルの添え字である．さらに，境界 $\mathcal{B}$ 上の時刻一定面 $\mathcal{B}_t \equiv \Sigma_t \cap \mathcal{B}$ について，そこでの誘導計量を $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ とし，法ベクトル r^μ に関する外部曲率テンソルを次で定義する[*4)]：

$$k_{\mu\nu} \equiv \boldsymbol{\sigma}_\mu{}^\rho\, \boldsymbol{\sigma}_\nu{}^\sigma\, \nabla_{(\rho}\mathsf{r}_{\sigma)} = \boldsymbol{\sigma}_\mu{}^\rho\, \boldsymbol{\sigma}_\nu{}^\sigma\, \nabla_\rho \mathsf{r}_\sigma$$
$$\left(\boldsymbol{\sigma}_\mu{}^\nu \equiv \delta_\mu^\nu + u_\mu\, u^\nu - \mathsf{r}_\mu\, \mathsf{r}^\nu\right). \tag{4.15}$$

このとき，それぞれの外部曲率のトレースは次のように書ける：

$$K = g^{\mu\nu}\, K_{\mu\nu} = \nabla_\mu u^\mu = h^{ij}\, K_{ij}\,, \tag{4.16}$$

$$\mathcal{K} = g^{\mu\nu}\, \mathcal{K}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \mathsf{r}^\mu = \gamma^{ab}\, \mathcal{K}_{ab}\,, \tag{4.17}$$

$$k = g^{\mu\nu}\, k_{\mu\nu} = h^{\mu\nu}\, \nabla_\mu \mathsf{r}_\nu = \boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu}\, \nabla_\mu \mathsf{r}_\nu = \boldsymbol{\sigma}^{AB}\, k_{AB}\,. \tag{4.18}$$

以上の準備を用いて，ハミルトニアンを作ろう．まず，時刻一定面 Σ_t を用い

*4)　余次元が 2 以上のとき，外部曲率テンソル（第 2 基本形式）は $\mathcal{K}_{\mu\nu}{}^\rho \equiv -\boldsymbol{\sigma}_\mu{}^\alpha\, \boldsymbol{\sigma}_\nu{}^\beta\, \nabla_\alpha \boldsymbol{\sigma}_\beta{}^\rho$ で定義されるが，$k_{\mu\nu}$ は，これを r_ρ と縮約させたものである：

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}{}^\rho\, \mathsf{r}_\rho = \boldsymbol{\sigma}_\mu{}^\alpha\, \boldsymbol{\sigma}_\nu{}^\beta\, \boldsymbol{\sigma}_\beta{}^\rho\, \nabla_\alpha \mathsf{r}_\rho = k_{\mu\nu} \quad (\because \boldsymbol{\sigma}_\beta{}^\rho\, \mathsf{r}_\rho = 0)\,.$$

て d 次元計量を ADM 分解すると（1.2.3 節参照），公式 (C.11) から Einstein–Hilbert 作用は

$$S_{\rm EH} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal M} {\rm d}^d x\,\sqrt{h}\,N\left({}^{(d-1)}R - 2\,\Lambda + K_{ij}\,K^{ij} - K^2\right)$$
$$- \frac{1}{8\pi G}\left[\int_{\Sigma_{t_2}} - \int_{\Sigma_{t_1}}\right]{\rm d}S_\mu\left(\nabla_u u^\mu - u^\mu\,K\right)$$
$$- \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal B}{\rm d}S_\mu\left(\nabla_u u^\mu - u^\mu\,K\right), \tag{4.19}$$

のように分解できる．これに，Gibbons–Hawking 項

$$S_{\rm GH} = -\frac{1}{8\pi G}\left[\int_{\Sigma_{t_2}} - \int_{\Sigma_{t_1}}\right]{\rm d}S[u]\,K + \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\,\mathcal K \tag{4.20}$$

を加える．境界 Σ_{t_1} および Σ_{t_2} 上では ${\rm d}S_\mu\,\nabla_u u^\mu = -{\rm d}S[u]\,u_\mu\,\nabla_u u^\mu = 0$ であり，$S_{\rm EH} + S_{\rm GH}$ の境界項は相殺する（${\rm d}S_\mu = \varepsilon(u)\,{\rm d}S[u]\,u_\mu = -{\rm d}S[u]\,u_\mu$ に注意）．一方，時間的超曲面 $\mathcal B$ 上の境界項は

$$\begin{aligned}
&8\pi G\left(S_{\rm EH} + S_{\rm GH}\right)\big|_{\mathcal B}\\
&= -\int_{\mathcal B}{\rm d}S_\mu\left(\nabla_u u^\mu - u^\mu\,K\right) + \int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\,\mathcal K \quad (K = \nabla_\mu u^\mu,\ \ \mathcal K = \nabla_\mu \mathsf r^\mu)\\
&= -\int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\left(\mathsf r_\mu\,\nabla_u u^\mu - \nabla_\mu \mathsf r^\mu\right) \qquad (\because\ \mathsf r_\mu\,u^\mu = 0)\\
&= \int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\left(u^\mu\,\nabla_u \mathsf r_\mu + \nabla_\mu \mathsf r^\mu\right) = \int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\left(u^\mu\,u^\nu + g^{\mu\nu}\right)\nabla_\mu \mathsf r_\nu\\
&= \int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\,h^{\mu\nu}\,\nabla_\mu \mathsf r_\nu = \int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\,\boldsymbol\sigma^{\mu\nu}\,\nabla_\mu \mathsf r_\nu \quad (\because\ \mathsf r^\nu\,\nabla_\mu \mathsf r_\nu = 0)\\
&= \int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\,k
\end{aligned} \tag{4.21}$$

となる．従って，作用 $S_{\rm grav} = S_{\rm EH} + S_{\rm GH} + S_0$ は次のようにまとめられる：

$$S_{\rm grav} = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal M}{\rm d}^d x\,\sqrt{h}\,N\left({}^{(d-1)}R - 2\Lambda + K_{ij}\,K^{ij} - K^2\right)$$
$$+ \frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal B}{\rm d}S[\mathsf r]\,k + S_0[\gamma_{ij}] \equiv \int_{\mathcal M}{\rm d}^d x\,\mathcal L_{\rm grav}\,. \tag{4.22}$$

この作用からハミルトニアンを求めよう．S_0 は境界のみの寄与なので，取りあえず S_0 を除いて議論を進める．(1.170) で得た等式

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\dot h_{ij} - \pounds_{\vec N} h_{ij}\right) \quad (\vec N = N^i\,\partial_i) \tag{4.23}$$

を用いて計算すると，共役運動量は

$$\pi^{ij}(t,\boldsymbol x) \equiv \frac{\partial \mathcal L_{\rm grav}}{\partial \dot h_{ij}} = \frac{\sqrt h}{16\pi G}\left(K^{ij} - h^{ij}\,K\right),$$
$$\Pi(t,\boldsymbol x) \equiv \frac{\partial \mathcal L_{\rm grav}}{\partial \dot N} = 0\,,\quad \Pi_i(t,\boldsymbol x) \equiv \frac{\partial \mathcal L_{\rm grav}}{\partial \dot N^i} = 0\,, \tag{4.24}$$

と求まり，1 次拘束条件 (primary constraint)

$$C(t,\boldsymbol{x}) \equiv \Pi(t,\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad C^i(t,\boldsymbol{x}) \equiv \Pi^i(t,\boldsymbol{x}) = 0\,, \tag{4.25}$$

を得る．拘束系における Dirac の処方（例えば [36] を見よ）に従って，1 次拘束条件の Lagrange 未定定数 $\lambda(t,\boldsymbol{x})$, $\lambda_a(t,\boldsymbol{x})$ を導入し，$-\bigl(\lambda\, C + \lambda^i\, C_i\bigr)$ を加えた作用を $\hat{S} \equiv \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\, \mathcal{L}$ と書く．すると，対応するハミルトニアン

$$\hat{H} \equiv \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x \left(\pi^{ij}\,\dot{h}_{ij} + \Pi\,\dot{N} + \Pi_i\,\dot{N}^i - \mathcal{L}\right) \tag{4.26}$$

は，少し大変な計算から*5)

$$\begin{aligned}\hat{H} = &\int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x \left(\lambda\, C + \lambda^i\, C_i + N\,\mathcal{H} + N^i\,\mathcal{H}_i\right)\\ &- \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{N}{8\pi G}\,k - 2\,\mathsf{r}_i\,N_j\,\frac{\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\right),\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\mathcal{H} \equiv \frac{16\pi G}{\sqrt{h}}\left[\pi_{ij}\,\pi^{ij} - \frac{(\mathrm{tr}\,\pi)^2}{d-2}\right] - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\left({}^{(d-1)}R - 2\,\Lambda\right), \tag{4.28}$$

$$\mathcal{H}_i \equiv -2\,h_{ik}\,D_j \pi^{jk}\,, \tag{4.29}$$

と求まる ($\mathrm{tr}\,\pi \equiv h_{ij}\,\pi^{ij}$).

Lagrange 未定定数 λ^i, λ に関する作用の変分は 1 次拘束条件 (4.25) を与えたが，さらに，この拘束条件が時間発展のもとで保たれるという整合性の条件から 2 次拘束条件 (secondary constraint)

$$\dot{C}(t,\boldsymbol{x}) \equiv \left\{C(t,\boldsymbol{x}),\, \hat{H}\right\} = \mathcal{H}(t,\boldsymbol{x}) = 0\,, \tag{4.30}$$

$$\dot{C}_i(t,\boldsymbol{x}) \equiv \left\{C_i(t,\boldsymbol{x}),\, \hat{H}\right\} = \mathcal{H}_i(t,\boldsymbol{x}) = 0\,, \tag{4.31}$$

を得る．ここで，Poisson 括弧は

$$\left\{h_{ij}(t,\boldsymbol{x}),\, \pi^{kl}(t,\boldsymbol{x}')\right\} = \delta^k_{(i}\delta^l_{j)}\,\delta^{(d-1)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,, \tag{4.32}$$

$$\left\{N(t,\boldsymbol{x}), \Pi(t,\boldsymbol{x}')\right\} = \delta^{(d-1)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,, \tag{4.33}$$

$$\left\{N^i(t,\boldsymbol{x}), \Pi_j(t,\boldsymbol{x}')\right\} = \delta^i_j\,\delta^{(d-1)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\,, \quad (\text{その他は } 0) \tag{4.34}$$

で定義した．2 次拘束条件 $\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x}) = 0$ および $\mathcal{H}_i(t,\boldsymbol{x}) = 0$ は，それぞれ**ハミルトニアン拘束条件**および**運動量拘束条件**と呼ばれる．

$C = \Pi$, $C_i = \Pi_i$ は時間発展しないため，N, N^i, h_{ij}, π^{ij} の時間発展のみを考えれば十分である．ラプスとシフトに対しては時間発展は $\dot{N}^i = \lambda^i$, $\dot{N} = \lambda$

*5) 変形の際に次のような関係式を用いるのが便利である：

$$\pi^{ij}\,\dot{h}_{ij} = \pi^{ij}\,\pounds_{\vec{N}} h_{ij} + \frac{1}{8\pi G}\,N\,\sqrt{h}\left(K_{ij}\,K^{ij} - K^2\right),$$

$$\frac{16\pi G}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij}\,\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{d-2}\right) = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\left(K_{ij}\,K^{ij} - K^2\right),$$

$$D_i N_j\,\pi^{ij} = \partial_i\left(N_j\,\pi^{ij}\right) - \sqrt{h}\,N_j\,D_i\left(\pi^{ij}/\sqrt{h}\right).$$

となり，λ^i, λ は任意関数なので，これらの時間発展は完全に任意である．一方，h_{ij}, π^{ij} の時間発展は $\hat{H}$ の中の $\lambda C + \lambda^i C_i$ の項からは全く影響を受けない．そこで，N, N^i は単に，ハミルトニアン拘束条件および運動量拘束条件を与えるための Lagrange 未定乗数とみなし，C, C_i に比例する項を $\hat{H}$ から取り除くことで，次の**縮約されたハミルトニアン** (reduced Hamiltonian) を得る：

$$
\begin{aligned}
H \equiv& \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x \left(N\,\mathcal{H} + N^i\,\mathcal{H}_i\right) \\
&- \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{N\,k}{8\pi G} - \frac{2\,\mathsf{r}_i\,N_j\,\pi^{ij}}{\sqrt{h}}\right) \quad \left[\sqrt{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \sqrt{\det(\boldsymbol{\sigma}_{AB})}\right].
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

h_{ij}, π^{ij} の時間発展の記述に関しては $\hat{H}$ と H は等価である．

なお，$\mathcal{H}(t,\boldsymbol{x})$ および $\mathcal{H}_i(t,\boldsymbol{x})$ は，d 次元の量で表すと

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\left({}^{(d-1)}R - 2\,\Lambda - K_{ij}\,K^{ij} + K^2\right) \\
&= -\frac{\sqrt{h}}{8\pi G}\,u^\mu\,u^\nu\left(G_{\mu\nu} + \Lambda\,g_{\mu\nu}\right) \qquad [\text{(C.8) と (C.11) 参照}],
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_i &= -\frac{1}{8\pi G}\sqrt{h}\left(D_j K_i{}^j - D_i K\right) \\
&= -\frac{\sqrt{h}}{8\pi G}\,u^\mu\,e_i^\nu\left(G_{\mu\nu} + \Lambda\,g_{\mu\nu}\right) \qquad [\text{(C.9) 参照}],
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

と書けるため，ハミルトニアン拘束条件および運動量拘束条件は単に Einstein 方程式の特定の成分 $\left(G_{\mu\nu}+\Lambda\,g_{\mu\nu}\right)u^\nu = 0$ に相当していることが分かる．Einstein 方程式の残りの成分は次の Hamilton 方程式と等価である：

$$
\dot{h}_{ij}(t,\boldsymbol{x}) \equiv \left\{h_{ij}(t,\boldsymbol{x}),\,H\right\}, \quad \dot{\pi}^{ij}(t,\boldsymbol{x}) \equiv \left\{\pi^{ij}(t,\boldsymbol{x}),\,H\right\}. \tag{4.38}
$$

なお，ベクトル場 $\mathsf{t}^\mu = N\,u^\mu + N^i\,e_i^\mu$ が，境界 $\mathcal{B}$ 上で $\mathcal{B}$ の接ベクトルとなること，つまり，$\mathsf{t}^\mu\,\mathsf{r}_\mu|_{\mathcal{B}} = 0$ を要請すると，仮定 $u^\mu\,\mathsf{r}_\mu|_{\mathcal{B}} = 0$ より，$\mathcal{B}$ 上ではシフトベクトル $\vec{N} = N^i\,\partial_i$ も r^μ に直交しなければならない．すると，$\vec{N}$ は $\mathcal{B}_t$ 上の接ベクトルの基底 $\{\boldsymbol{e}_A\} = \{\partial_A\}$ $(A = 1,\ldots,d-2)$ で展開できる：

$$
\vec{N}|_{\mathcal{B}} = N^A\,\boldsymbol{e}_A\,. \tag{4.39}
$$

以下では，$\mathcal{B}$ 上でシフトベクトルを考えるときには，基本的に，この展開を用いることにする．そして，添え字 A, B の上げ下げは $\mathcal{B}_t$ 上の誘導計量 $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ を用いて行う．

境界積分としてのエネルギー

以上で重力理論のハミルトニアンが構成できた．ここでは，このハミルトニアンをある古典解で評価した値，つまり時空のエネルギーが，$\mathcal{B}_t$ 上の積分として表されることを説明する．

(4.35) で求めたハミルトニアン H の値を，ある古典解で評価すると，古典解が $\mathcal{H}=0=\mathcal{H}_i$ を満たすことから

$$H|_{\rm cl}=-\int_{\mathcal{B}_t}\mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{N\,k}{8\pi G}-\frac{2\,\mathsf{r}_i\,N^A\,\pi_A{}^i}{\sqrt{h}}\right) \tag{4.40}$$

を得る．ここで，シフトベクトルの展開 (4.39) を用い，$\pi_A{}^i\equiv \boldsymbol{e}_{Aj}\,\pi^{ji}$ を定義した．さらに，作用には (4.22) の $S_0\equiv\int_{\mathcal{B}}\mathrm{d}^{d-1}x\,\mathcal{L}_0$ を加える任意性があったため，一般にハミルトニアン $H_{\rm grav}\equiv H-\int_{\mathcal{B}_t}\mathrm{d}^{d-2}x\,\mathcal{L}_0$ の値は

$$H_{\rm grav}|_{\rm cl}=-\int_{\mathcal{B}_t}\mathrm{d}^{d-2}x\left[\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{N\,k}{8\pi G}-\frac{2\,\mathsf{r}_i\,N^A\,\pi_A{}^i}{\sqrt{h}}\right)+\mathcal{L}_0\right] \tag{4.41}$$

と書ける．作用 S_0 の形としては,（境界 $\mathcal{B}$ に制限した）ラプス関数 N とシフトベクトル N^A の線形結合で書けていることを仮定する [37]：

$$S_0=\int_{\mathcal{B}}\mathrm{d}^{d-1}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\left[-N\,\frac{k_0}{8\pi G}-N^A\,j_A^{(0)}\right]$$
$$\left[\text{ここで，}k_0\text{ と }j_A^{(0)}\text{ は正準変数 }h_{ij}|_{\mathcal{B}}\text{ と }\pi^{ij}|_{\mathcal{B}}\text{ の関数}\right]. \tag{4.42}$$

とくに，k_0 や $j_A^{(0)}$ の具体的な形としては，ある基準となる計量 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ を導入し，その計量で外部曲率のトレース k や $2\,\mathsf{r}_i\,\pi_A{}^i/\sqrt{h}$ を評価したものを用いる：

$$k_0=k|_{(g_{\mu\nu}^{(0)}\text{ で評価})}\,,\quad j_A^{(0)}=-\frac{2\,\mathsf{r}_i\,\pi_A{}^i}{\sqrt{h}}\bigg|_{(g_{\mu\nu}^{(0)}\text{ で評価})}. \tag{4.43}$$

本書では，基準となる計量として静的なもののみを考え，その場合には $\pi^{ij}=0$ となるため $j_A^{(0)}=0$ であり，作用 S_0 は次の形をとる：

$$S_0=-\frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{B}}\mathrm{d}^{d-1}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,N\,k_0=-\frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{B}}\mathrm{d}S[\mathsf{r}]\,k_0\,. \tag{4.44}$$

この S_0 を用いると，ハミルトニアンの値は

$$H_{\rm grav}|_{\rm cl}=-\int_{\mathcal{B}_t}\mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\left[\frac{N}{8\pi G}(k-k_0)-\frac{2\,\mathsf{r}_i\,N^A\,\pi_A{}^i}{\sqrt{h}}\right] \tag{4.45}$$

となる．とくに，漸近的平坦な時空の場合には，$N=1$, $N^A=0$ と選んだときのものをエネルギーとして定義する：

$$E\equiv H_{\rm grav}|_{\rm cl}=-\frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{B}_t}\mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,(k-k_0)\,. \tag{4.46}$$

これを見ると分かるように，次のことが成り立つ：

『時空のエネルギーは，時刻一定面 Σ_t の境界 $\mathcal{B}_t$ 上の積分で表される』．

ADM エネルギー

漸近的平坦な時空の場合に，上で定義したエネルギー E が時空の自然なエネルギーを与えることを確認しよう．

具体的な計算を行うにあたり，まず，外部曲率 k の計算方法を記しておく．以下で具体的に k を評価するのは，計量が

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(x)\,\mathrm{d}t^2 + f^{-2}(x)\,\mathrm{d}r^2 + \boldsymbol{\sigma}_{AB}\,\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B \tag{4.47}$$

という形をしていて，時刻一定面 Σ_t が t 一定面，境界 $\mathcal{B}$ が r 一定面として与えられる場合である．この場合には，単位法ベクトルは $n = (1/N)\,\partial_t$, $\mathsf{r} = f(x)\,\partial_r$ となり，外部曲率 k は

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu}\,\pounds_{\mathsf{r}}\boldsymbol{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu}\,\mathsf{r}^\rho\,\partial_\rho\boldsymbol{\sigma}_{\mu\nu} + \boldsymbol{\sigma}^\mu{}_\nu\,\partial_\mu\mathsf{r}^\nu \\ &= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}^{AB}\,\mathsf{r}^\rho\,\partial_\rho\boldsymbol{\sigma}_{AB} = \mathsf{r}^\rho\,\partial_\rho \ln\sqrt{\boldsymbol{\sigma}} = f(x)\,\partial_r \ln\sqrt{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \tag{4.48}$$

と書ける（$\boldsymbol{\sigma}_{\mu t} = 0 = \boldsymbol{\sigma}_{\mu r}$ を用いた）．このように，$\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}$ を微分することで k を求めるのが簡単である．

次に，4 次元の漸近的平坦な時空の場合に，(4.46) で定義したエネルギー E が，**ADM エネルギー** [9]

$$E_{\mathrm{ADM}} = \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}S\,\mathsf{r}^i\left(\partial^j g_{ij} - \delta^{kl}\,\partial_i g_{kl}\right) \qquad \left(\mathrm{d}S \equiv r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2\right)$$
$$\left[S^2_\infty : \text{無限遠方の球面，}\ x^i\ (i=1,\ldots,d-1) : \text{無限遠方での直交座標}\right] \tag{4.49}$$

に一致することを示そう．ここでは，簡単のため，球対称な時空

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(r)\,\mathrm{d}t^2 + f^{-2}(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2 \quad \left[f \to 1\ (r\to\infty)\right] \tag{4.50}$$

の場合での一致のみを確認することにする．

まず，E を計算するためには，基準となる計量 $g^{(0)}_{\mu\nu}$ を指定する必要がある．ここでは，これを Minkowski 時空に選ぶ．このとき，(4.48) より $k = f\,\partial_r \ln(r^2\,\sin\theta) = 2f/r$ であり，k_0 は単に $f\to 1$ と置き換えればよく $k_0 = 2/r$ である．従って，

$$E = -\frac{1}{8\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\sin\theta\,r^2\,\frac{2\,(f-1)}{r} = \lim_{r\to\infty}\frac{r\left[1 - f(t,r)\right]}{G} \tag{4.51}$$

を得る．

一方，ADM エネルギーを計算するため，直交座標を用いて計量を書き直す：

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\,\mathrm{d}t^2 + \left[\delta_{ij} + \left(f^{-2}-1\right)\frac{x_i\,x_j}{r^2}\right]\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\,. \tag{4.52}$$

すると［$\mathsf{r}^i \sim x^i/r\ (r \to \infty)$ に注意せよ］,

$$E_{\mathrm{ADM}} = \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}S\, \frac{x^i}{r} \left\{ \partial^j \left[\left(f^{-2} - 1\right) \frac{x_i\, x_j}{r^2} \right] - \partial_i \left(f^{-2} - 1\right) \right\}$$
$$= \frac{1}{2G} \lim_{r\to\infty} r\, \frac{1 - f^2}{f^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{r\,(1-f)}{G} \tag{4.53}$$

となり，確かに (4.51) で与えた E と一致する．球対称性を要請しない一般的な導出については [38] を参考にされたい．

具体例として，この表式から質量 M の 4 次元 Schwarzschild 時空の ADM エネルギーを計算してみよう．(1.174) の Schwarzschild 座標の計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right) \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2\,GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\, \mathrm{d}\Omega_2^2 \tag{4.54}$$

を思い出すと，$f \sim 1 - (GM/r)\ (r \to \infty)$ であるため，ADM エネルギーは直ちに求まる：

$$E_{\mathrm{ADM}} = \lim_{r\to\infty} \frac{r\,(1-f)}{G} = M\,. \tag{4.55}$$

こうして，ADM エネルギーが Schwarzschild ブラックホールの質量に一致することが確認でき，ADM エネルギー，あるいは (4.46) で定義したエネルギー E が自然な定義であることが確認できた．

なお，漸近的 AdS 時空の場合にも，(4.45) のハミルトニアンで，$N^A = 0$ としたものが自然なエネルギーの定義 [39] を再現することが知られている [38]．

4.1.3 Regge–Teitelboim のチャージ

前節では，重力理論のハミルトニアン H_{grav} は，古典解を代入すると消えるバルク部分

$$H_{\mathrm{bulk}} \equiv \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x \left(N\,\mathcal{H} + N^i\, \mathcal{H}_i\right) \tag{4.56}$$

と境界項 (4.45)

$$H_{\mathrm{bdry}} \equiv -\int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\, \sqrt{\boldsymbol{\sigma}} \left[\frac{N}{8\pi G}\,(k - k_0) - \frac{2\, \mathsf{r}_i\, N^A\, \pi_A{}^i}{\sqrt{h}} \right] \tag{4.57}$$

の和として書けることを示した：

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{grav}} &\equiv H_{\mathrm{bulk}} + H_{\mathrm{bdry}} \\ &= \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x \left(N\,\mathcal{H} + N^i\, \mathcal{H}_i\right) \\ &\quad - \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\, \sqrt{\boldsymbol{\sigma}} \left[\frac{N}{8\pi G}\,(k - k_0) - \frac{2\, \mathsf{r}_i\, N^A\, \pi_A{}^i}{\sqrt{h}} \right]. \end{aligned} \tag{4.58}$$

本小節では，別の視点から，この境界項 H_{bdry} に相当する項を導出する．

Regge と Teitelboim [40] は，ハミルトニアンのバルク部分 H_{bulk} の変分が

$$\delta H_{\mathrm{bulk}} = \int_\Sigma \mathrm{d}^{d-1}x \left(\frac{\delta H_{\mathrm{bulk}}}{\delta h_{ij}}\, \delta h_{ij} + \frac{\delta H_{\mathrm{bulk}}}{\delta \pi^{ij}}\, \delta \pi^{ij} \right) + (\text{境界項}) \tag{4.59}$$

という形になる点に着目し，最後の余計な境界項を消して Hamilton 方程式を正しく得るためには，H_{bulk} に対してさらに境界項 Q を加える必要があることを指摘した．そして，この境界項 Q をエネルギーや運動量などの保存量の定義として用いることを提案した．

まず初めに (4.59) を確認しよう．いま，ラプスやシフトを固定したまま，正準変数 (h_{ij}, π^{ij}) に関する変分のみを取ると，(4.29) の $\mathcal{H}_i$ の変分は

$$\begin{aligned}
\delta\big(N^i\,\mathcal{H}_i\big) &= -2\,\delta\big(N^i\,h_{ik}\,D_j\pi^{jk}\big) = 2\,\delta\big[D_jN^i\,h_{ik}\,\pi^{jk} - \partial_j\big(N^i\,h_{ik}\,\pi^{jk}\big)\big] \\
&= 2\,D_iN_j\,\delta\pi^{ij} + 2\,\pi^{ki}\,D_kN^j\,\delta h_{ij} + 2\,\delta^{(d-1)}\Gamma^i{}_{jl}\,N^l\,h_{ik}\,\pi^{jk} \\
&\quad - \partial_j\big(2\,N^i\,\pi^{jk}\,\delta h_{ik} + 2\,N^i\,h_{ik}\,\delta\pi^{jk}\big) \\
&= \pounds_{\vec{N}} h_{ij}\,\delta\pi^{ij} + 2\,\pi^{k(i}\,D_kN^{j)}\,\delta h_{ij} + N^l\,\pi^{jk}\,D_l\delta h_{jk} \\
&\quad - \partial_j\big(2\,N^i\,\pi^{jk}\,\delta h_{ik} + 2\,N^i\,h_{ik}\,\delta\pi^{jk}\big) \\
&= \pounds_{\vec{N}} h_{ij}\,\delta\pi^{ij} - \big[D_k(N^k\,\pi^{ij}) - 2\,\pi^{k(i}\,D_kN^{j)}\big]\,\delta h_{ij} \\
&\quad - \partial_j\big[\big(2\,N^i\,\pi^{jk} - N^j\,\pi^{ik}\big)\,\delta h_{ik} + 2\,N^i\,h_{ik}\,\delta\pi^{jk}\big] \\
&= \pounds_{\vec{N}} h_{ij}\,\delta\pi^{ij} - \pounds_{\vec{N}}\pi^{ij}\,\delta h_{ij} \\
&\quad - \partial_j\big(2\,N^i\,\delta\pi_i{}^j - N^j\,\pi^{ik}\,\delta h_{ik}\big)\,,
\end{aligned} \tag{4.60}$$

となる．一方，(4.28) の $\mathcal{H}$ の変分は

$$\begin{aligned}
&\delta(N\,\mathcal{H}) \\
&= -\frac{8\pi G\,N}{\sqrt{h}}\left[\left(\pi_{kl}\,\pi^{kl} - \frac{\pi^2}{d-2}\right)h^{ij} - 4\left(\pi^i{}_k\,\pi^{kj} - \frac{\pi}{d-2}\,\pi^{ij}\right)\right]\delta h_{ij} \\
&\quad + \frac{32\pi G\,N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij} - \frac{\pi}{d-2}\,h_{ij}\right)\delta\pi^{ij} - \frac{N}{16\pi G}\,\delta\big(\sqrt{h}\,{}^{(d-1)}R - 2\Lambda\sqrt{h}\big)\,,
\end{aligned} \tag{4.61}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
&N\,\delta\big(\sqrt{h}\,{}^{(d-1)}R\big) \\
&= -N\sqrt{h}\left({}^{(d-1)}R^{ij} - \frac{1}{2}\,{}^{(d-1)}R\,h^{ij}\right)\delta h_{ij} \\
&\quad + \partial_i\big[N\sqrt{h}\,\big(h^{ik}\,D^j\delta h_{kj} - h^{kj}\,D^i\delta h_{kj}\big)\big] \\
&\quad - \sqrt{h}\,\partial_i N\,\big(h^{ik}\,D^j\delta h_{kj} - h^{kj}\,D^i\delta h_{kj}\big) \\
&= \sqrt{h}\left[-N\left({}^{(d-1)}R^{ij} - \frac{1}{2}\,{}^{(d-1)}R\,h^{ij}\right) + D^jD^iN - h^{ij}\,D^2N\right]\delta h_{ij} \\
&\quad + \partial_i\big[N\sqrt{h}\,\big(h^{ik}\,D^j\delta h_{kj} - h^{kj}\,D^i\delta h_{kj}\big) \\
&\qquad\quad - \sqrt{h}\,\partial_j N\,\big(h^{ik}\,h^{jl} - h^{kl}\,h^{ij}\big)\,\delta h_{kl}\big] \\
&= \sqrt{h}\left[-N\left({}^{(d-1)}R^{ij} - \frac{1}{2}\,{}^{(d-1)}R\,h^{ij}\right) + D^jD^iN - h^{ij}\,D^2N\right]\delta h_{ij}
\end{aligned}$$

$$+\,\partial_i\big[G^{kjil}\left(N\,D_l\delta h_{kj}-\partial_l N\,\delta h_{kj}\right)\big]$$
$$\big[\,G^{ijkl}\equiv\sqrt{h}\left(h^{i(k}\,h^{l)j}-h^{ij}\,h^{kl}\right)\big]\,, \tag{4.62}$$

であるので，次の式が得られる：

$$\delta H_{\mathrm{bulk}}=\int_{\Sigma_t}\mathrm{d}^{d-1}x\left(A^{ij}\,\delta h_{ij}+B_{ij}\,\delta\pi^{ij}\right)$$
$$-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\,G^{ijkl}\left(N\,D_k\delta h_{ij}-\partial_k N\,\delta h_{ij}\right)$$
$$-\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\left(2\,N^i\,\delta\pi_i{}^l-N^l\,\pi^{jk}\,\delta h_{jk}\right), \tag{4.63}$$

$$A^{ij}\equiv-\pounds_{\vec{N}}\pi^{ij}+\frac{N\sqrt{h}}{16\pi G}\left({}^{(d-1)}R^{ij}-\frac{1}{2}\,{}^{(d-1)}R\,h^{ij}+\Lambda\,h^{ij}\right)$$
$$-\frac{8\pi G\,N}{\sqrt{h}}\left[\left(\pi_{kl}\pi^{kl}-\frac{\pi^2}{d-2}\right)h^{ij}-4\left(\pi^i{}_k\,\pi^{kj}-\frac{\pi}{d-2}\,\pi^{ij}\right)\right]$$
$$-\frac{\sqrt{h}}{16\pi G}\left(D^jD^iN-h^{ij}\,D^2N\right), \tag{4.64}$$

$$B_{ij}\equiv\pounds_{\vec{N}}h_{ij}+\frac{32\pi G\,N}{\sqrt{h}}\left(\pi_{ij}-\frac{\pi}{d-2}\,h_{ij}\right). \tag{4.65}$$

(4.63) は，確かに (4.59) の形をしている．

上の A^{ij} および B_{ij} は，d 次元の量を用いると，次のようにも書ける：

$$A^{ij}=-e^i_\mu\,e^j_\nu\left[\pounds_{\vec{N}}\pi^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\,N\,\mathcal{H}\,h^{\mu\nu}\right.$$
$$\left.-\frac{N}{16\pi G}\,G^{\mu\nu\rho\sigma}\left(R_{\rho\sigma}-\frac{2\Lambda}{d-2}\,g_{\rho\sigma}\right)\right], \tag{4.66}$$

$$B_{ij}=\pounds_{\vec{N}}h_{ij}+2\,N\,K_{ij}=e^\mu_i\,e^\nu_j\,\pounds_{\vec{N}}h_{\mu\nu}\,, \tag{4.67}$$

$$\pi^{\mu\nu}\equiv e^\mu_i\,e^\nu_j\,\pi^{ij}\,,\quad G^{\mu\nu\rho\sigma}\equiv\sqrt{h}\left(h^{\mu(\rho}\,h^{\sigma)\nu}-h^{\mu\nu}\,h^{\rho\sigma}\right). \tag{4.68}$$

従って，余計な境界項を消すように，

$$\delta Q\equiv\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\,G^{ijkl}\left(N\,D_k\delta h_{ij}-\partial_k N\,\delta h_{ij}\right)$$
$$+\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\left(2\,N^k\,\delta\pi_k{}^l-N^l\,\pi^{jk}\,\delta h_{jk}\right) \tag{4.69}$$

となる Q を付け加えれば，ハミルトニアン $\mathbf{H}\equiv H_{\mathrm{bulk}}+Q$ は

$$\mathbf{H}=\int_{\Sigma_t}\mathrm{d}^{d-1}x\left(A^{ij}\,\delta h_{ij}+B_{ij}\,\delta\pi^{ij}\right) \tag{4.70}$$

を満たすようになり，次の Hamilton 方程式が得られる：

$$\dot{h}_{ij}=\frac{\delta\mathbf{H}}{\delta\pi^{ij}}=B_{ij}\,,\quad\dot{\pi}^{ij}=-\frac{\delta\mathbf{H}}{\delta h_{ij}}=-A_{ij}\,. \tag{4.71}$$

より一般に，任意のベクトル場 ξ^μ に対して

$$H[\xi]\equiv\int_{\Sigma_t}\mathrm{d}^{d-1}x\,\mathcal{H}_\mu(t,\boldsymbol{x})\,\xi^\mu(t,\boldsymbol{x})\,, \tag{4.72}$$

$$\mathcal{H}_\mu \equiv -\frac{\sqrt{h}}{8\pi G}\left(G_{\mu\nu}+\Lambda\, g_{\mu\nu}\right)u^\nu\,, \tag{4.73}$$

を定義する．すると，$\mathcal{H}=\mathcal{H}_\mu\, u^\mu$, $\mathcal{H}_i=\mathcal{H}_\mu\, e_i^\mu$ ［(4.36), (4.37) を参照］となるので，ハミルトニアンのバルク部分は次のようにも書くことができる：

$$\begin{aligned}
H_{\text{bulk}} &= \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x\left(N\,\mathcal{H}+N^i\,\mathcal{H}_i\right)=\int_{\Sigma_t}\mathrm{d}^{d-1}x\,\mathcal{H}_\mu\left(N\,u^\mu+N^i\,e_i^\mu\right)\\
&= H[N\,u+N^i\,e_i]=H[\mathsf{t}]\\
&\quad\left(\mathsf{t}=N\,u+N^i\,e_i\quad[(1.160)\text{ 参照}]\right).
\end{aligned} \tag{4.74}$$

ここで，ベクトル場 ξ^μ を Σ_t の法ベクトルと接ベクトルに分解する記号

$$\xi^\mu=\xi^\perp\,u^\mu+\hat{\xi}^i\,e_i^\mu\quad\left(\xi^\perp=N\,\xi^t\,,\quad \hat{\xi}^i=\xi^i+N^i\,\xi^t\right), \tag{4.75}$$

を導入すると，ラプスやシフトは $N=\mathsf{t}^\perp$, $N^i=\hat{\mathsf{t}}^i$ と表せる．この記号を用いると，一般のベクトル場 ξ に対する $H[\xi]$ の変分 $\delta H[\xi]$ は，(4.63)–(4.65) で $N\to\xi^\perp$ かつ $N^i\to\hat{\xi}^i$ の置き換えをしたものになる：

$$\begin{aligned}
\delta H[\xi] &= \int_{\Sigma_t}\mathrm{d}^{d-1}x\left(A^{ij}[\xi]\,\delta h_{ij}+B_{ij}[\xi]\,\delta\pi^{ij}\right)\\
&\quad-\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\,G^{ijkl}\left(\xi^\perp\,D_k\delta h_{ij}-\partial_k\xi^\perp\,\delta h_{ij}\right)\\
&\quad-\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\left(2\,\hat{\xi}^i\,\delta\pi_i{}^l-\hat{\xi}^l\,\pi^{jk}\,\delta h_{jk}\right).
\end{aligned} \tag{4.76}$$

ここで，$A^{ij}[\xi]$ および $B_{ij}[\xi]$ は，d 次元の量を用いて

$$\begin{aligned}
A^{ij}[\xi] &= -e_\mu^i\,e_\nu^j\left[\pounds_\xi\pi^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\,\xi^\perp\,\mathcal{H}\,h^{\mu\nu}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{N}{16\pi G}\,G^{\mu\nu\rho\sigma}\left(R_{\rho\sigma}-\frac{2\Lambda}{d-2}\,g_{\rho\sigma}\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$B_{ij}[\xi]=\pounds_{\hat{\xi}}h_{ij}+2\,\xi^\perp\,K_{ij}=e_i^\mu\,e_j^\nu\,\pounds_\xi h_{\mu\nu}\,, \tag{4.78}$$

$$\pi^{\mu\nu}\equiv e_i^\mu\,e_j^\nu\pi^{ij}\,,\quad G^{\mu\nu\rho\sigma}\equiv\sqrt{h}\left(h^{\mu(\rho}\,h^{\sigma)\nu}-h^{\mu\nu}\,h^{\rho\sigma}\right), \tag{4.79}$$

と書ける．従って，

$$\begin{aligned}
\delta Q[\xi] &= \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\,G^{ijkl}\left(\xi^\perp\,D_k\delta h_{ij}-\partial_k\xi^\perp\,\delta h_{ij}\right)\\
&\quad+\int_{\mathcal{B}_t}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{tl}\left(2\,\hat{\xi}^i\,\delta\pi_i{}^l-\hat{\xi}^l\,\pi^{jk}\,\delta h_{jk}\right)
\end{aligned} \tag{4.80}$$

を積分することで，(4.76) の境界項を相殺する $Q[\xi]$ を見つければ，

$$\mathbf{H}[\xi]\equiv H[\xi]+Q[\xi] \tag{4.81}$$

について

$$\left\{\pi^{ij},\,\mathbf{H}[\xi]\right\}=-A^{ij}[\xi]\approx e_\mu^i\,e_\nu^j\,\pounds_\xi\pi^{\mu\nu}\,, \tag{4.82}$$

$$\{h_{ij},\, \mathbf{H}[\xi]\} = B_{ij}[\xi] = e_i^{\mu}\, e_j^{\nu}\, \pounds_{\xi} h_{\mu\nu}\,, \tag{4.83}$$

が成り立つ．ここで，$\approx$ は，運動方程式を課したときに成り立つ等式を表す．こうして，$\mathbf{H}[\xi]$ はベクトル場 ξ^{μ} に沿った無限小の微分同相写像を生成することが分かる．

以下では，4 次元漸近的 Minkowski 時空の場合と 3 次元漸近的 AdS 時空の場合に境界項 $Q[\xi]$ を見つけ，修正されたハミルトニアン $\mathbf{H}[\xi]$ を求める．

4.1.4　4 次元漸近的 Minkowski 時空の場合

この例では，宇宙定数 Λ がゼロで，漸近的に Minkowski となる 4 次元時空を考える．質量 M の Schwarzschild 計量の $r \to \infty$ での漸近形が

$$\mathrm{d}s^2 \sim -\Big(1 - \frac{2\,GM}{r}\Big)\,\mathrm{d}t^2 + \Big(\delta_{ij} + \frac{2\,GM\,x_i\,x_j}{r^3}\Big)\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \tag{4.84}$$

であることを参考にして，以下では正準変数 $(h_{ij},\, \pi^{ij})$ が

$$h_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}(r^{-1})\,, \quad \partial_k h_{ij} = \mathcal{O}(r^{-2})\,, \tag{4.85}$$

$$N = 1 + \mathcal{O}(r^{-1})\,, \quad \partial_i N = \mathcal{O}(r^{-2})\,, \tag{4.86}$$

$$N^i = \mathcal{O}(r^{-1})\,, \quad \partial_i N^j = \mathcal{O}(r^{-2})\,, \tag{4.87}$$

$$\pi^{ij} = \mathcal{O}(r^{-2})\,, \tag{4.88}$$

という漸近形を持つと仮定する．すると，(4.63) の表面積分のうち消えずに残る項は

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} (\mathrm{d}^2x)_{tl}\, G^{ijkl}\, N\, D_k \delta h_{ij} \\
&\sim -\frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}S_j\,\big(D_i\delta h_{ij} - D_j\delta h_{ii}\big) \\
&\sim -\frac{1}{16\pi G}\,\delta\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}S_j\,\big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big) \\
&\qquad\qquad \Big[\because {}^{(d-1)}\Gamma^k_{ij}\,\delta h_{lm} \sim \mathcal{O}(r^{-3})\Big]
\end{aligned} \tag{4.89}$$

だけである．ここで，積分測度は $\mathrm{d}S_j = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,\delta^r_j$ であり，2 行目以降で添え字 $i,\,j$ は足し上げている．従って

$$Q[\mathrm{t}] = \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}S_j\,\big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big) \tag{4.90}$$

とすることでハミルトニアン $\mathbf{H} = H_{\mathrm{bulk}} + Q[\mathrm{t}]$ が得られる．

古典解に対しては，$H_{\mathrm{bulk}} = 0$ となるため，エネルギーは

$$\mathbf{H}|_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}S_j\,\big(\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ii}\big) \tag{4.91}$$

となる．これは，ADM エネルギーの表式 (4.49) と一致している．つまり，S_{grav}

に対応するハミルトニアンに含まれていた境界項 H_{bdry} (4.57) と同じものを再現できている．

4.1.5 3 次元漸近的 AdS 空間の場合

次に，負の宇宙項がある場合の漸近的 AdS 空間の場合を扱う．

AdS 空間の幾何

まずは，AdS 空間の幾何を簡単に説明しよう．3 次元反 de Sitter 時空 AdS_3 は，平坦な時空

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}U^2 - \mathrm{d}V^2 + \mathrm{d}X^2 + \mathrm{d}Y^2\,, \tag{4.92}$$

に埋め込まれた双曲面 $-U^2 - V^2 + X^2 + Y^2 = -\ell^2$ として定義される．

この双曲面全体を張るグローバル座標は

$$U = \ell\cosh\rho\,\sin(t/\ell)\,, \qquad V = \ell\cosh\rho\,\cos(t/\ell)\,, \tag{4.93}$$

$$X = \ell\sinh\rho\,\cos\phi\,, \qquad Y = \ell\sinh\rho\,\sin\phi\,, \tag{4.94}$$

$$\left(0 \le \rho \le \infty\,, \quad 0 \le \phi \le 2\pi\,, \quad 0 \le t \le 2\pi\,\ell\right) \tag{4.95}$$

で定義され，この座標系では計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\cosh^2\rho\,\mathrm{d}t^2 + \ell^2\left(\mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\,\mathrm{d}\phi^2\right) \tag{4.96}$$

となる．このままでは閉じた時間的曲線が現れるため，普遍被覆をとり t の範囲を $-\infty$ から ∞ とする．動径座標の再定義 $r = \ell\sinh\rho$ $(0 \le r \le \infty)$ を行うと，計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right)\mathrm{d}t^2 + \left(\frac{r^2}{\ell^2} + 1\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\phi^2 \tag{4.97}$$

となる．このときの AdS_3 を**グローバル $\mathbf{AdS_3}$** という．

Poincaré 座標は

$$U = \frac{1}{2\,\rho}\left(\ell^2 + x^2 + \rho^2 - t^2\right)\,, \qquad V = \ell\,\frac{t}{\rho}\,, \tag{4.98}$$

$$Y = \frac{-1}{2\,\rho}\left(-\ell^2 + x^2 + \rho^2 - t^2\right)\,, \qquad X = \ell\,\frac{x}{\rho}\,, \tag{4.99}$$

$$\left(-\infty \le t,\, x \le \infty\,, \quad 0 < \rho \le \infty\right) \tag{4.100}$$

で与えられ，計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \ell^2\,\frac{-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}\rho^2}{\rho^2} \tag{4.101}$$

となる．Poincaré 座標は AdS_3 の半分 $(U + Y = \ell^2/\rho > 0)$ しか覆わない．動径座標の再定義 $r \equiv \ell^2/\rho$ $(0 \le r \le \infty)$ と x 座標の再定義 $\phi \equiv x/\ell$ を行うと，計量は次のようになる：

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{r^2}{\ell^2}\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\ell^2}{r^2}\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\phi^2\,. \tag{4.102}$$

次に，BTZ ブラックホールを考える[41]：

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\,\mathrm{d}t^2 + \rho^2\left(\mathrm{d}\phi + N^\phi\,\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{r^2}{N^2\,\rho^2}\,\mathrm{d}r^2\,, \tag{4.103}$$

$$N^2 \equiv \frac{r^2\,(r^2 - r_+^2)}{\ell^2\,\rho^2}\,, \quad N^\phi \equiv \frac{4\,G\,J}{\rho^2}\,, \tag{4.104}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + 4\,G\,M\ell^2 - \frac{r_+^2}{2}\,, \quad r_+^2 \equiv 8\,G\,\ell\,\sqrt{M^2\,\ell^2 - J^2}\,. \tag{4.105}$$

この解は，局所的には AdS 空間と同じ計量を持ち一定曲率の時空であるが，大域的には非自明な構造をしており，グローバル AdS_3 の一部の領域を覆っている．

AdS 空間の等長変換群：$\mathbf{SL(2,R)}_{\boldsymbol{L}} \times \mathbf{SL(2,R)}_{\boldsymbol{R}}$

計量 (4.92) を持つ $\mathbb{R}^{2,2}$ の等長変換群 $\mathrm{SO}(2,2) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ は次の生成子で生成される：

$$\begin{aligned}
&J_{01} = V\,\partial_U - U\,\partial_V\,, \quad J_{02} = X\,\partial_V + V\,\partial_X\,, \quad J_{03} = Y\,\partial_V + V\,\partial_Y\,,\\
&J_{23} = X\,\partial_Y - Y\,\partial_X\,, \quad J_{12} = X\,\partial_U + U\,\partial_X\,, \quad J_{13} = Y\,\partial_U + U\,\partial_Y\,.
\end{aligned} \tag{4.106}$$

さらに，再定義

$$J_0 = -\frac{1}{2}\left(J_{12} + J_{03}\right), \quad J_\pm = \frac{1}{2}\left(\pm J_{01} + J_{02} \pm J_{23} - J_{13}\right), \tag{4.107}$$

$$\bar{J}_0 = -\frac{1}{2}\left(J_{12} - J_{03}\right), \quad \bar{J}_\pm = \frac{1}{2}\left(\pm J_{01} + J_{02} \mp J_{23} + J_{13}\right), \tag{4.108}$$

を行うと，これらの代数は 2 つの可換な $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 代数の直和の形になる：

$$\left[J_0,\, J_\pm\right] = \pm J_\pm\,, \quad \left[J_+,\, J_-\right] = 2\,J_0\,, \tag{4.109}$$

$$\left[\bar{J}_0,\, \bar{J}_\pm\right] = \pm \bar{J}_\pm\,, \quad \left[\bar{J}_+,\, \bar{J}_-\right] = 2\,\bar{J}_0\,, \quad \left[J_a,\, \bar{J}_b\right] = 0\,. \tag{4.110}$$

これらの生成子は双曲面の埋め込みを不変に保ち，AdS 空間の等長変換を生成する．なお，$\mathrm{AdS}_3 \simeq \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ より，上の等長変換は $g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ に対する変換 $g \to g_L\,g\,g_R^{-1}$ $\left[(g_L,\,g_R) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_L \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_R\right]$ に対応している．

漸近的対称性

Brown と Henneaux は，$(2+1)$-次元の漸近的 AdS 空間を

- 計量の漸近形は $\mathrm{O}(2,2)$ 不変である．
- $\mathrm{O}(2,2)$ 変換を生成するチャージの値が有限である．
- BTZ ブラックホールなど，興味のある時空が含まれている．

という 3 つの条件から定義した[42]*6)．具体的には，まず，グローバル AdS_3 の

*6) 同様の定義は，Henneaux と Teitelboim により $(3+1)$-次元の漸近的 AdS 空間の場合にも議論されている[43]．

計量を $\bar{g}_{\mu\nu}$ とし，$r \to \infty$ において，計量の各成分の $\bar{g}_{\mu\nu}$ からのずれが以下で与えられる時空を考えた：

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}\,, \tag{4.111}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{g}_{tt} & \bar{g}_{tr} & \bar{g}_{t\phi} \\ \bar{g}_{rt} & \bar{g}_{rr} & \bar{g}_{r\phi} \\ \bar{g}_{\phi t} & \bar{g}_{\phi r} & \bar{g}_{\phi\phi} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\left(\frac{r^2}{\ell^2}+1\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r^2}{\ell^2}+1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \tag{4.112}$$

$$(\delta g_{\mu\nu}) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{O}(r^0) & \mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{O}(r^0) \\ \mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{O}(r^{-4}) & \mathcal{O}(r^{-3}) \\ \mathcal{O}(r^0) & \mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{O}(r^0) \end{pmatrix}. \tag{4.113}$$

AdS_3 のグローバルパッチや Poincaré パッチでの計量，そして，BTZ ブラックホールの計量は上の条件を満たしていることが確認できる．正準変数を用いて書き直すと，この漸近条件は次のようになる［(1.162) 式参照]：

$$(h_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\ell^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-4}) & \mathcal{O}(r^{-3}) \\ \mathcal{O}(r^{-3}) & r^2 + \mathcal{O}(r^0) \end{pmatrix}, \tag{4.114}$$

$$N = \frac{r}{\ell} + \mathcal{O}(r^{-1})\,, \quad N^i = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \end{pmatrix}, \tag{4.115}$$

$$(\pi^{ij}) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^{-2}) \\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-5}) \end{pmatrix}. \tag{4.116}$$

ここで

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^t \\ \xi^r \\ \xi^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell\, T(t,\phi) + \frac{\ell^3}{r^2}\,\bar{T}(t,\phi) + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ r\,R(t,\phi) + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \Phi(t,\phi) + \frac{\ell^2}{r^2}\,\bar{\Phi}(t,\phi) + \mathcal{O}(r^{-4}) \end{pmatrix} \tag{4.117}$$

という振る舞いをするベクトル場を考え，$\pounds_\xi g_{\mu\nu}$ が (4.113) の形にとどまることを要請すると

$$\ell\,\partial_t T(t,\phi) = \partial_\phi \Phi(t,\phi) = -R(t,\phi)\,, \quad \partial_\phi T(t,\phi) = \ell\,\partial_t \Phi(t,\phi)\,, \tag{4.118}$$

$$\bar{T}(t,\phi) = -\frac{\ell}{2}\,\partial_t R(t,\phi)\,, \quad \bar{\Phi}(t,\phi) = \frac{1}{2}\,\partial_\phi R(t,\phi)\,, \tag{4.119}$$

を得る．すると，$x^\pm \equiv (t/\ell) \pm \phi$ とおけば，(4.118) より

$$T(t,\phi) = T^+(x^+) + T^-(x^-)\,, \quad \Phi(t,\phi) = T^+(x^+) - T^-(x^-)\,, \tag{4.120}$$

$$R(t,\phi) = -\partial_+ T^+(x^+) - \partial_- T^-(x^-)\,, \tag{4.121}$$

となる．これを (4.119) に代入すると次が得られる：

$$\bar{T}(t,\,\phi) = \frac{1}{2}\left[\partial_+^2 T^+(x^+) + \partial_-^2 T^-(x^-)\right], \tag{4.122}$$

$$\bar{\Phi}(t,\,\phi) = -\frac{1}{2}\left[\partial_+^2 T^+(x^+) - \partial_-^2 T^-(x^-)\right]. \tag{4.123}$$

以上より，漸近形を (4.113) に保つ “漸近的 Killing ベクトル場”ξ は

$$\xi(t,\, r,\, \phi) = \xi^{+}(r,\, x^{+}) + \xi^{-}(r,\, x^{-}) \tag{4.124}$$

と書ける．ここで，

$$\xi^{\pm}(r,\, x^{\pm}) \equiv \begin{pmatrix} \ell\left(T^{\pm} + \frac{\ell^2}{2r^2}\,\partial_{\pm}^2 T^{\pm}\right) + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ -r\,\partial_{\pm}T^{\pm} + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \pm\left(T^{\pm} - \frac{\ell^2}{2r^2}\,\partial_{\pm}^2 T^{\pm}\right) + \mathcal{O}(r^{-4}) \end{pmatrix} \tag{4.125}$$

である．つまり，関数 $T^{\pm}$ ごとに対応する漸近的 Killing ベクトル場 $\xi^{\pm}$ があり，関数 $T^{\pm}$ を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx^{\pm}}/2$ で Fourier 展開すると，それぞれの基底 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx^{\pm}}/2$ に対応した漸近的 Killing ベクトル場 $\xi^{\pm}$ の基底

$$\xi_n^{\pm}(r,\, x^{\pm}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx^{\pm}} \begin{pmatrix} \ell\left(\frac{1}{2} - \frac{\ell^2 n^2}{4r^2}\right) + \mathcal{O}(r^{-4}) \\ -\frac{\mathrm{i}n\,r}{2} + \mathcal{O}(r^{-1}) \\ \pm\left(\frac{1}{2} + \frac{\ell^2 n^2}{4r^2}\right) + \mathcal{O}(r^{-4}) \end{pmatrix} \tag{4.126}$$

が得られる．主要な項のみを残すことにすると，次のようにも書ける：

$$\xi_n^{\pm}(r, x^{\pm}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx^{\pm}}\left[\partial_{\pm} - \frac{\ell^2 n^2}{2r^2}\,\partial_{\mp} - \mathrm{i}\frac{n\,r}{2}\,\partial_r\right]. \tag{4.127}$$

さて，これらの漸近的 Killing ベクトル場の基底同士の Lie 括弧を計算すると，その主要項は

$$\left[\xi_m^{\pm},\, \xi_n^{\pm}\right] = -\mathrm{i}(m-n)\,\xi_{m+n}^{\pm}\,, \quad \left[\xi_m^{+},\, \xi_n^{-}\right] = 0\,, \tag{4.128}$$

となる．つまり，Killing ベクトルの成す代数は，2 つの Virasoro 代数の直和の形になる．これは，ベクトル場同士の Lie 括弧であるから，もちろん中心拡大項は出ない．

無限遠方で急激に減速する $T^{\pm} = 0$ のベクトル場 ξ^{μ} に関する微分同相写像は物理的状態を変えない自明なゲージ変換に相当すると考えられる．そこで，『ゼロでない $T^{\pm}$ を持つベクトル場で生成される微分同相写像全体』を『自明なゲージ変換の全体』で割った群を**漸近的対称性の群** (ASG : Asymptotic Symmetry Group) と呼ぶ．

さて，(4.80) で，第 4 項 $\hat{\xi}^l\,\pi^{jk}\,\delta h_{jk}$ は仮定した漸近形から無視できるため

$$\delta Q[\xi] = \int \mathrm{d}\phi\left[\frac{G^{ijkr}}{16\pi G}\left(\xi^{\perp}\,D_k\delta h_{ij} - \partial_k\xi^{\perp}\,\delta h_{ij}\right) + 2\,\hat{\xi}^k\,\delta\pi_k{}^r\right] \tag{4.129}$$

である．グローバル AdS_3 のときに $Q[\xi] = 0$ となるように $Q[\xi]$ の定数部分を固定すると，$Q[\xi]$ は

$$Q[\xi] = \int \mathrm{d}\phi\left\{\frac{\bar{G}^{ijkr}}{16\pi G}\left[\xi^{\perp}\,\bar{D}_k h_{ij} - \partial_k\xi^{\perp}\left(h_{ij} - \bar{h}_{ij}\right)\right] + 2\,\hat{\xi}^k\,\pi_k{}^r\right\} \tag{4.130}$$

となる．ここで，$\bar{G}^{ijkr}$ はグローバル AdS_3 の計量 $\bar{h}_{ij}$ を用いて作られたテンソルで $\bar{D}_k$ は $\bar{h}_{ij}$ に関する共変微分である．

$L_n \equiv Q[\xi_n^+]$ と $\bar{L}_n \equiv Q[\xi_n^-]$ を定義すると，$\mathsf{t} = \partial_t = \ell^{-1}\left(\xi_0^+ + \xi_0^-\right)$ と $\mathsf{m} = \partial_\phi = \xi_0^+ - \xi_0^-$ より，エネルギーは $\ell^{-1}\left(L_0 + \bar{L}_0\right)$，角運動量は $\left(L_0 - \bar{L}_0\right)$ である．具体的に，BTZ ブラックホール (4.103)–(4.105)

$$\begin{pmatrix} -\frac{r^2-4G\ell\left(M\ell+\sqrt{M^2\ell^2-J^2}\right)}{\ell^2} & 0 & 4GJ \\ 0 & \frac{\ell^2}{r^2-8G\ell\sqrt{M^2\ell^2-J^2}} & 0 \\ 4GJ & 0 & r^2+4G\ell\left(M\ell-\sqrt{M^2\ell^2-J^2}\right) \end{pmatrix} \tag{4.131}$$

の場合にエネルギーと角運動量を評価すると

$$\begin{aligned} \ell^{-1}\left(L_0+\bar{L}_0\right) = Q[\mathsf{t}] &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \frac{\bar{G}^{ijkr}}{16\pi G}\left[\xi^\perp \bar{D}_k h_{ij} - \partial_k \xi^\perp \left(h_{ij}-\bar{h}_{ij}\right)\right] \\ &= M + \frac{1}{8G}\,, \end{aligned} \tag{4.132}$$

$$L_0 - \bar{L}_0 = Q[\mathsf{m}] = 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \, \pi_\phi{}^r = J \tag{4.133}$$

が得られる．また，これらから次を得る：

$$L_0 - \frac{\ell}{16\,G} = \frac{M\,\ell + J}{2}\,, \quad \bar{L}_0 - \frac{\ell}{16\,G} = \frac{M\,\ell - J}{2}\,. \tag{4.134}$$

中心電荷の計算

対称性の生成子 $\mathbf{H}[\xi] = H[\xi] + Q[\xi]$ は一般に

$$\left\{\mathbf{H}[\xi], \mathbf{H}[\eta]\right\} = \mathbf{H}\left[[\xi,\eta]\right] + K[\xi,\eta] \tag{4.135}$$

という中心拡大された代数関係を持つ．ここで，$K[\xi,\eta]$ は定数（中心項）である．いま第 1 類拘束条件がある系を扱っているため，量子化を考える前に，まずゲージ固定条件を指定し，Dirac 括弧 $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}}$ を導入する必要がある [36]．この Dirac 括弧も Poisson 括弧と同じ代数を満たすことと，Dirac 括弧の中では拘束条件 $H[\xi]$ が消えることから，

$$\delta_\eta Q[\xi] = \left\{Q[\xi], Q[\eta]\right\}_{\mathrm{D}} = Q\left[[\xi,\eta]\right] + K[\xi,\eta] \tag{4.136}$$

という代数を得る．この両辺の値をグローバル AdS_3 の時刻一定面 $t=0$ で評価することで中心項 $K[\xi,\eta]$ が計算できる．実際，チャージ $Q[\xi]$ はグローバル AdS_3 で評価すると 0 になるように作っていたため，右辺第 1 項が $Q\left[[\xi,\eta]\right]\big|_{g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}} = 0$ となり，中心項は

$$K[\xi,\eta] = \delta_\eta Q[\xi]\big|_{g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}} = Q[\xi]\big|_{g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+\pounds_\eta \bar{g}_{\mu\nu}} \tag{4.137}$$

と求まる．もし，η が厳密な Killing ベクトルであれば $\pounds_\eta \bar{g}_{\mu\nu} = 0$ より

$K[\xi,\eta]=0$ になるが，いまは漸近的 Killing ベクトルを考えているためこれが 0 でない値を持つ.

ξ と η をそれぞれ基底 $\xi^{\pm}_m$ で展開することで，一般に

$$K[\xi^{\pm}_m,\xi^{\pm}_n]=Q[\xi^{\pm}_m]\big|_{g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+\pounds_{\xi^{\pm}_n}\bar{g}_{\mu\nu}}\,, \tag{4.138}$$

$$K[\xi^{\pm}_m,\xi^{\mp}_n]=Q[\xi^{\pm}_m]\big|_{g_{\mu\nu}=\bar{g}_{\mu\nu}+\pounds_{\xi^{\mp}_n}\bar{g}_{\mu\nu}}\,, \tag{4.139}$$

を計算すれば十分である.

$$\pounds_{\xi^{\pm}_n}\bar{g}_{\mu\nu}\sim \mathrm{e}^{inx^{\pm}}\begin{pmatrix} \mathrm{i}n\,\frac{n^2-2}{2} & -n^2\,\frac{\ell^3}{r^3} & \pm\mathrm{i}\ell\,n\,\frac{n^2-1}{2}\\ -n^2\,\frac{\ell^3}{r^3} & -\mathrm{i}n\,\frac{\ell^4}{r^4} & \mp\frac{\ell^4\,n^2}{2\,r^3}\\ \pm\mathrm{i}\ell\,n\,\frac{n^2-1}{2} & \mp\frac{\ell^4\,n^2}{2\,r^3} & \mathrm{i}\,\frac{\ell^2\,n^3}{2}\end{pmatrix} \tag{4.140}$$

より，正準変数は

$$h_{ij}-\bar{h}_{ij}\sim\begin{pmatrix}-\mathrm{i}n\,\frac{\ell^4}{r^4} & \frac{\ell^4\,n^2}{2\,r^3}\\ \frac{\ell^4\,n^2}{2\,r^3} & \mathrm{i}\,\frac{\ell^2\,n^3}{2}\end{pmatrix}\,, \tag{4.141}$$

$$\pi^{ij}=\begin{pmatrix}\mathcal{O}(r^{-1}) & \mathcal{O}(r^{-2})\\ \mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-5})\end{pmatrix}\,, \tag{4.142}$$

$$\pi_i{}^j=\begin{pmatrix}\mathcal{O}(r^{-3}) & \mathcal{O}(r^{-4})\\ \pm\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\frac{t}{\ell}-\phi)}\,\ell m\,(m^2-1)}{32\pi G}+\mathcal{O}(r^{-2}) & \mathcal{O}(r^{-3})\end{pmatrix}\,, \tag{4.143}$$

$$N=\frac{r}{\ell}+\mathcal{O}(r^{-1})\,,\quad N^i=\big(\mathcal{O}(r^{-1})\quad \mathcal{O}(r^{-2})\big)\,, \tag{4.144}$$

となる．すると，これを (4.130) 式に代入して，中心項が次のように求まる：

$$\begin{aligned}K[\xi^{\pm}_m,\xi^{\pm}_n]&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\,\Big\{\frac{2\bar{G}^{r\phi\phi r}\,\bar{D}_\phi h_{r\phi}+\bar{G}^{\phi\phi rr}\,\bar{D}_r h_{\phi\phi}}{16\pi G}\,(\xi^{\pm}_m)^{\perp}\\ &\qquad -\frac{\bar{G}^{\phi\phi rr}}{16\pi G}\,\partial_r(\xi^{\pm}_m)^{\perp}\left(h_{\phi\phi}-\bar{h}_{\phi\phi}\right)\big]+2\,\hat{\xi}^{\phi}\,\pi_\phi{}^r\Big\}\\ &=\frac{\mathrm{i}\ell\,n(n^2-1)}{16\pi G}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+n)\,x^{\pm}}\big|_{t=0}\\ &=\frac{\mathrm{i}\ell\,n(n^2-1)}{8G}\,\delta_{m+n,0}\,,\end{aligned} \tag{4.145}$$

$$K[\xi^{\pm}_m,\xi^{\mp}_n]=0\,. \tag{4.146}$$

こうして，$\xi^{\pm}_n$ に対する保存電荷 $L^{\pm}_n\equiv Q[\xi^{\pm}_n]$ が

$$\left\{L^{\pm}_m,\,L^{\pm}_n\right\}_{\mathrm{D}}=-\mathrm{i}(m-n)\,L^{\pm}_{m+n}-\frac{\mathrm{i}\ell\,m\,(m^2-1)}{8G}\,\delta_{m+n,0}\,, \tag{4.147}$$

$$\left\{L^{+}_m,\,L^{-}_n\right\}_{\mathrm{D}}=0 \tag{4.148}$$

という代数を満たすことが分かった．これは，中心電荷が $c=3\ell/2G$ の，2 つの Virasoro 代数の直和である.

最後に，$L^{\pm}_n$ を量子力学的演算子とみなし，置き換え $\{\cdot,\cdot\}_{\mathrm{D}}\to-\mathrm{i}\,[\cdot,\cdot]$ を行

えば，量子論における Virasoro 代数

$$\left[L_m^{\pm}, L_n^{\pm}\right] = (m-n)\, L_{m+n}^{\pm} + \frac{c}{12}\, m\,(m^2-1)\, \delta_{m+n,0}\,, \tag{4.149}$$

$$\left[L_m^{+}, L_n^{-}\right] = 0\,, \quad c = \frac{3\ell}{2G}\,, \tag{4.150}$$

が得られる．この中心電荷 $c = 3\ell/2G$ は，6.4 節でブラックホールのエントロピーの微視的な数え上げを行う際に重要になる．

なお，上記の解析が正当化されるのは，『(AdS 半径 ℓ) $\gg$ (3 次元 Planck 長さ) $\sim G$』，つまり，$c \gg 1$ のときであることに注意しよう．

4.2 Euclid 重力理論と時空の熱力学

Gibbons と Hawking[31] は，Euclid 化した重力理論の作用を用いて分配関数を評価する方法を提唱し，これを用いて Schwarzschild 時空や de Sitter 時空のエントロピーを計算した．その後，York 達の研究[37],[44]~[46] によって，この手法の熱力学的な意味付けが徹底的に行われ，作用の境界項の熱力学的役割や，熱力学関数との対応などが明らかになった．本節では，この「Euclid 化された作用を用いた時空の熱力学」を紹介する．なお，記号の混乱を避けるため，本節に限って，重力の作用は I と記し，エントロピーを S と記すことにする．

4.2.1 統計集団と分配関数

低エネルギー有効理論としての Einstein 重力理論

前節では保存量が時刻一定面の空間的無限遠点で定義されることを確認した．以下,（まだ正体不明の）量子重力理論の基本的な力学的自由度を総称して ϕ と書き，温度 $1/\beta_0$ の平衡状態における分配関数を考えてみよう：

$$\begin{aligned} Z(\beta_0) = \mathrm{tr}\, \mathrm{e}^{-\beta_0 H_{\mathrm{QG}}} &= \int \mathrm{d}\phi\, \langle\phi|\ \mathrm{e}^{-\beta_0 H_{\mathrm{QG}}}\ |\phi\rangle \\ &= \int_{\mathrm{PBC}} \mathcal{D}\phi\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar} I_{\mathrm{QG,\,E}}[\phi]}\ . \end{aligned} \tag{4.151}$$

ここで $I_{\mathrm{QG,\,E}}[\phi]$ は，虚時間 $\tau \equiv \mathrm{i}t$ の周期を $\hbar\beta_0$ としたときの Euclid 化された作用で，$\int_{\mathrm{PBC}} \mathcal{D}\phi$ は周期境界条件のもとでの経路積分である[36]．

これ以上の量子論的な計算はできないが，低エネルギー極限における古典近似は次のようにして行える．まず，低エネルギー有効理論は，局所場 $\varphi = (g_{\mu\nu}, \varphi_{\mathrm{mat}})$ を有効場とする Einstein 重力理論になっているはずである．すると，$\hbar \to 0$ の極限で，分配関数は古典解 $\varphi_{\mathrm{cl}} = (g_{\mu\nu}^{\mathrm{cl}}, \varphi_{\mathrm{mat}}^{\mathrm{cl}})$ を用いて次のように近似できる：

$$Z(\beta_0) \simeq \mathrm{e}^{-\frac{1}{\hbar} I_{\mathrm{E}}[\varphi_{\mathrm{cl}}]}\ . \tag{4.152}$$

ここで，φ_{cl} は，次の Euclid 化された Einstein 重力理論の作用の古典解である：

$$
\begin{aligned}
I_E &= I_{\mathrm{grav,\,E}} + I_{\mathrm{mat,\,E}} \\
&= \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}_\mathrm{E}} \mathrm{d}^d x\sqrt{g}\,(-R+2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}_\mathrm{E}} \mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{\mathsf{h}}\,\mathsf{K} + I_{0,\mathrm{E}} \\
&\quad + \int \mathrm{d}^d x\,\mathcal{L}_{\mathrm{mat,\,E}}\big(\varphi_{\mathrm{mat}}, \partial_\mu\varphi_{\mathrm{mat}}\big)\,.
\end{aligned} \tag{4.153}
$$

以下，Euclid 化された空間のトポロジーは $\mathcal{M}_\mathrm{E} = \Sigma \times S^1$ であるとする．また，議論を簡単にするため，物質場が無い状態を考える．

統計集団と境界条件

統計力学における統計集団（アンサンブル）は，温度やエネルギーを固定したときに許される全ての可能な微視的状態を集めたものとして構成される．以下で見るように，重力理論においては全ての熱力学量は時刻一定面の境界で定義される．とくに，境界での温度を指定することは計量の虚時間成分を固定することに対応する．また，エネルギーなどの保存量を指定することも計量の境界での振る舞いを固定することに対応する．つまり，重力理論では，「どういう統計集団を考えるか」という選択は，「時空の境界において場にどのような境界条件を課すか」ということに対応する．大まかには，重力理論における大正準集団や小正準集団は次のような境界条件と対応している：

統計集団	境界で固定する変数
大正準集団	“温度”（ラプス関数 N），“速度”（シフト N^A）
小正準集団	“エネルギー密度” ϵ（外部曲率 k），“運動量密度” j_A（後述）

以下の節では，大正準集団や小正準集団を構成する上で，どのような境界条件を置くべきかを詳細に検討し，そして，それぞれの境界条件のもとでの変分問題を定義するのに一番適した作用を構成する．なお，以下では $\hbar = 1$ とする．

4.2.2 Brown–York テンソル

Euclid 化を行う前に，まず本小節で，Lagrange 形式の重力理論でエネルギーや角運動量を定義する際に便利な Brown–York テンソルについて説明する．ここで扱う時空は，4.1.2 節と同様，図 4.2 に描かれているような，空間的超曲面 Σ_{t_1} および Σ_{t_2} と，時間的超曲面 $\mathcal{B}$ を境界に持つ d 次元時空である．便利のため，それぞれの超曲面上での幾何学量を再び書いておく：

一般の境界	空間的超曲面	時間的超曲面	$\mathcal{B}_t \equiv \Sigma_t \cap \mathcal{B}$
境界 $\partial\mathcal{M}$	$\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2}$	$\mathcal{B}$	–
単位法ベクトル n^μ	u^μ (時間的)	r^μ (空間的)	u^μ および r^μ
誘導計量 h_{ij}	h_{ij}	γ_{ab}	$\boldsymbol{\sigma}_{AB}$
外部曲率 $\mathsf{K}_{\mu\nu}$	$K_{\mu\nu}$	$\mathcal{K}_{\mu\nu}$	$k_{\mu\nu}$

各時刻一定面 Σ_t 上には，座標 x^i $(i = 1, \ldots, d-1)$ を導入し，時空の座標を

$(x^\mu) = (t,\, x^i)$ と書く．計量は次のように ADM 分解しておく：

$$g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu = -N^2\, \mathrm{d}t^2 + h_{ij} \left(\mathrm{d}x^i + N^i\, \mathrm{d}t\right) \left(\mathrm{d}x^j + N^j\, \mathrm{d}t\right). \quad (4.154)$$

また，$\mathcal{B}_t$ 上の座標を x^A $(A = 1, \ldots, d-2)$，$\mathcal{B}$ 上の座標系を $(x^a) = (t, x^A)$ $(a = 0, 1, \ldots, d-2)$ とし，座標基底を $\{\boldsymbol{e}_a\} \equiv \{\partial_a\} = \{\partial_t,\, \boldsymbol{e}_A\}$ $(\boldsymbol{e}_A \equiv \partial_A)$ とする．$\mathcal{B}$ 上では u^μ と r^μ は直交しているとし，単位法ベクトル r は $e_i \equiv \partial_i$ で展開できる $(\mathsf{r} = \mathsf{r}^i\, e_i)$．さらに，時間発展を生成するベクトル場 $\mathsf{t}^\mu = N\, n^\mu + N^i\, e_i^\mu$ が $\mathcal{B}$ に接することを要請する．そのため，シフトベクトル N^i は $\mathcal{B}$ 上で $\mathcal{B}_t \equiv \Sigma_t \cap \mathcal{B}$ に接する成分しか持てない $(N^i\, \mathsf{r}_i|_{\mathcal{B}} = 0)$．従って，$\mathcal{B}$ 上で

$$\vec{N} = N^a\, \partial_a = N^A e_A^a\, \partial_a\,, \quad (4.155)$$

$$\mathsf{t} = \mathsf{t}^a\, \partial_a = N\, u + \vec{N} = \left(N\, u^a + N^A\, e_A^a\right) \partial_a \quad (4.156)$$

となる．このとき，$\mathcal{B}$ 上の誘導計量は，N と N^A を用いて次のように書ける：

$$\gamma_{ab}\, \mathrm{d}x^a\, \mathrm{d}x^b = -N^2\, \mathrm{d}t^2 + \boldsymbol{\sigma}_{AB} \left(\mathrm{d}x^A + N^A\, \mathrm{d}t\right) \left(\mathrm{d}x^B + N^B\, \mathrm{d}t\right). \quad (4.157)$$

以下，添え字 a, b の上げ下げは γ_{ab} で，添え字 A, B の上げ下げは $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ で行うとする．

さて，時空が境界を持つ場合には，重力理論の作用は

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{grav}} &\equiv I_{\mathrm{EH+GH}} + I_0 \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\, \sqrt{h}\, N \left({}^{(d-1)}R - 2\Lambda + K_{ij}\, K^{ij} - K^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{B}} \mathrm{d}S[\mathsf{r}]\, (k - k_0) \end{aligned} \quad (4.158)$$

と書かれたことを思い出そう［(4.22), (4.44) 参照］．ここで，作用 $I_{\mathrm{EH+GH}} = I_{\mathrm{EH}} + I_{\mathrm{GH}}$ の変分の式 (4.13) を思い出すと，I_{grav} の変分は

$$\begin{aligned} \delta I_{\mathrm{grav}} &= -\frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\, \sqrt{-g} \left(G^{\mu\nu} + \Lambda\, g^{\mu\nu}\right) \delta g_{\mu\nu} \\ &= \left[\int_{\Sigma_{t_2}} - \int_{\Sigma_{t_1}}\right] \mathrm{d}^{d-1}x\, \pi^{ij}\, \delta h_{ij} + \int_{\mathcal{B}} \mathrm{d}^{d-1}x\, \frac{\sqrt{-\gamma}}{2}\, T_{\mathrm{BY}}^{ab}\, \delta\gamma_{ab}\,, \end{aligned} \quad (4.159)$$

$$T_{\mathrm{BY}}^{ab} \equiv -\frac{1}{8\pi G} \left(\mathcal{K}^{ab} - \mathcal{K}\, \gamma^{ab}\right) + \frac{2}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta I_0}{\delta \gamma_{ab}}\,, \quad (4.160)$$

と書ける．境界 $\mathcal{B}$ 上で定義されたテンソル T_{BY}^{ab} は Brown–York 応力エネルギーテンソル，あるいは単に **Brown–York テンソル** [37] と呼ばれる．

Brown–York テンソルの重要な性質として，Einstein 方程式の下では，それ

が『保存カレントのように振る舞う』というものがある[*7]：

$$D^b T^{\mathrm{BY}}_{ab} = -\boldsymbol{e}^{\mu}_{a}\, \mathsf{r}^{\nu}\, T_{\mu\nu} \quad (\boldsymbol{e}^{\mu}_{a} \equiv \delta^{\mu}_{a})$$
$$(D_a : \mathcal{B} \text{ 上の誘導計量 } \gamma_{ab} \text{ に関する共変微分}) . \tag{4.161}$$

これは，境界 $\mathcal{B}$ 上でエネルギー運動量テンソルが $\mathsf{r}^{\mu}\, \boldsymbol{e}^{\nu}_{a}\, T_{\mu\nu} = 0$ を満たす場合（つまり境界からエネルギー運動量が逃げ出さない場合）には厳密な保存カレントになる．

T^{ab}_{BY} が保存している場合には，$\mathcal{B}$ 上の Killing ベクトル場 ξ^a に対してカレント $J^a_{\xi} \equiv -T^{ab}_{\mathrm{BY}}\, \xi_b$ を定義すれば

$$D_a J^a_{\xi} = -T^{ab}_{\mathrm{BY}}\, D_a \xi_b = -T^{ab}_{\mathrm{BY}}\, D_{(a}\xi_{b)} = 0 \tag{4.162}$$

となり，J^a_{ξ} は保存カレントになる．従って，T^{ab}_{BY} が保存していれば

$$Q_{\xi} = -\int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\, \sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\, u_a\, J^a_{\xi} = \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\, \sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\, u_a\, T^{ab}_{\mathrm{BY}}\, \xi_b \tag{4.163}$$

は，時刻一定面 $\mathcal{B}_t$ の取り方に依らない保存量になる．

準局所エネルギー

$\mathcal{B}$ 上に Killing ベクトル場があれば，Brown–York テンソルを用いて保存量が得られることが分かった．これを用いてエネルギーや角運動量を定義しよう．

まず，$\mathcal{B}$ 上の $u = u^a\, \partial_a$ と $\boldsymbol{e}_A = \boldsymbol{e}^a_A\, \partial_a = \partial_A$ を用いて，T^{ab}_{BY} を

$$T^{ab}_{\mathrm{BY}} = \epsilon\, u^a\, u^b + 2\, j^A\, \boldsymbol{e}^{(a}_{A}\, u^{b)} + \boldsymbol{e}^a_A\, \boldsymbol{e}^b_B\, \tau^{AB} , \tag{4.164}$$
$$\epsilon \equiv u^a\, u^b\, T^{\mathrm{BY}}_{ab} , \quad j_A \equiv -\boldsymbol{e}^a_A\, u^b\, T^{\mathrm{BY}}_{ab} , \quad \tau_{AB} \equiv \boldsymbol{e}^a_A\, \boldsymbol{e}^b_B\, T^{\mathrm{BY}}_{ab} , \tag{4.165}$$

と分解する．このとき，ϵ, j_A, τ_{AB} は，$\mathcal{B}_t$ 上の外部曲率 k_{AB} などを用いて表せる．実際，(4.165) に (4.160) を代入し，外部曲率 $\mathcal{K}_{ab}$ の分解公式

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{ab} &\equiv \gamma_a{}^{\mu}\, \gamma_b{}^{\nu}\, \nabla_{(\mu}\mathsf{r}_{\nu)} = \gamma_a{}^{\mu}\, \gamma_b{}^{\nu}\, \nabla_{\mu}\mathsf{r}_{\nu} \quad (\text{注：} \mathsf{r}^{\mu} \text{ は超曲面直交}) \\ &= -(\mathsf{r}\cdot a)\, u_a\, u_b + 2\, \boldsymbol{\sigma}_{(a}{}^{\mu}\, u_{b)}\, K_{\mu i}\, \mathsf{r}^i + k_{ab} \quad (a^{\mu} \equiv u^{\nu}\, \nabla_{\nu} u^{\mu})\end{aligned}$$
$$\left[\begin{array}{l}\gamma_{\mu}{}^{\nu} \equiv \delta^{\nu}_{\mu} - \mathsf{r}_{\mu}\, \mathsf{r}^{\nu} , \quad k_{ab} = \boldsymbol{\sigma}_a{}^{\mu}\, \boldsymbol{\sigma}_b{}^{\nu}\, \nabla_{\mu}\mathsf{r}_{\nu} \quad [(4.15) \text{ 参照}] \\ \boldsymbol{\sigma}_{\mu}{}^{\nu} \equiv \delta^{\nu}_{\mu} + u_{\mu}\, u^{\nu} - \mathsf{r}_{\mu}\, \mathsf{r}^{\nu} = \gamma_{\mu}{}^{\nu} + u_{\mu}\, u^{\nu}\end{array}\right] \tag{4.166}$$

とそのトレース $\mathcal{K} = \gamma^{ab}\, \mathcal{K}_{ab} = r \cdot a + k$ を用いれば，

$$\epsilon = -\frac{1}{8\pi G}\,(k - k_0) , \tag{4.167}$$

---

*7) この等式は，$I_0 = 0$ の場合には次のように示される．付録の (C.9) 式で，法ベクトル n^{μ} を r^{μ} とし，外部曲率 K_{ij} を $\mathcal{K}_{ab}$ とすると $\mathsf{r}^{\mu}\, \boldsymbol{e}^{\nu}_{a}\, R_{\mu\nu} = D^b \mathcal{K}_{ab} - \partial_a \mathcal{K}$ を得る．これと，Einstein 方程式 $R_{\mu\nu} = 8\pi G\, [T_{\mu\nu} - (T^{\rho}{}_{\rho}/(d-2))\, g_{\mu\nu}]$ を用いれば，$\mathsf{r}^{\mu}\, \boldsymbol{e}^{\nu}_{a}\, T_{\mu\nu} = [1/(8\pi G)]\, D^b(\mathcal{K}_{ab} - \mathcal{K}\, \gamma_{ab}) = -D^b T^{\mathrm{BY}}_{ab}$ となり (4.161) が示される．$I_0 \neq 0$ の場合にも，本書で扱うような簡単な場合には，$D_b\big[(2/\sqrt{-\gamma})\, (\delta I_0/\delta\gamma_{ab})\big] = 0$ となるため，$D^b T^{\mathrm{BY}}_{ab} = -\mathsf{r}^{\mu}\, \boldsymbol{e}^{\nu}_{a}\, T_{\mu\nu}$ が成り立つ．

$$j_A = -\frac{2}{\sqrt{h}}\, e^i_A\, \mathrm{r}_j\, \pi_i{}^j = -\frac{2}{\sqrt{h}}\, \mathrm{r}_j\, \pi_A{}^j\,, \tag{4.168}$$

$$\tau^{AB} = -\frac{1}{8\pi G}\left[(k-k_0)^{AB} - (r\cdot a + k - k_0)\,\boldsymbol{\sigma}^{AB}\right], \tag{4.169}$$

が得られる．

ここで得られた ϵ と j_A の表式を，(4.58) で求めたハミルトニアン $H_{\rm grav}$ の境界項と比較すると，$H_{\rm grav}$ は

$$H_{\rm grav} = \int_{\Sigma_t} \mathrm{d}^{d-1}x\big(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i\big) + \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,\big(N\epsilon - N^A j_A\big) \tag{4.170}$$

と書けることが分かる．この値を古典解に対して評価すると，$\mathcal{H}=0=\mathcal{H}_i$ より

$$\begin{aligned} H_{\rm grav}|_{\rm cl} &= \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,\big(N\,\epsilon - N^A\, j_A\big) \\ &= \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\, u_a\, T^{ab}_{\rm BY}\, \mathrm{t}_b = Q_{\mathrm{t}} \end{aligned} \tag{4.171}$$

となる．これは，t^μ が時間的 Killing ベクトルの場合には，($T^{ab}_{\rm BY}$ が保存している限り) 保存量である．とくに，漸近的平坦な時空の場合に $\mathcal{B}_t$ を無限遠方にとり，$N\to 1$, $N^A\to 0$ となる座標系をとれば，この値は

$$E \equiv \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,\epsilon = -\frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,(k-k_0) \tag{4.172}$$

となる．この量は，**準局所エネルギー** (quasi-local energy) と呼ばれるが，漸近的平坦な時空におけるエネルギーの定義 (4.46) と一致するので，平坦な時空では ADM エネルギーを与える．

(4.172) を見ると，準局所エネルギー E は，$(d-1)$ 次元の時間的超曲面 $\mathcal{B}$ 上で定義された "エネルギー密度" ϵ を，$(d-2)$ 次元空間 $\mathcal{B}_t$ 上で積分したものになっている．以下，ϵ を準局所エネルギー密度と呼ぶことにするが，これは d 次元時空におけるエネルギー密度とは次元が異なることに注意しよう．また，以下で熱力学系の体積と書いたときには，これは $(d-2)$ 次元空間 $\mathcal{B}_t$ の体積を表す．また，示量性の概念も，$(d-2)$ 次元空間 $\mathcal{B}_t$ の体積に関して定義され，準局所エネルギー密度 ϵ は，この意味での示量性変数の密度量になっている．

時空が t 以外にも（いくつかの）Killing ベクトル場 η を持つ場合は，そのすべてが $\mathcal{B}$ に接するように選ぶことにする．つまり，$\mathcal{B}$ 上で $\eta=\eta^a\,\partial_a$ となるようにとる．とくに軸対称性を持つ場合には，回転を生成する Killing ベクトル場 m の軌道が $\mathcal{B}_t=\mathcal{B}\cap\Sigma_t$ に接するように（つまり $\mathcal{B}$ 上で $\mathsf{m}=\mathsf{m}^a\,\partial_a=\mathsf{m}^A\,\partial_A$ となるように）曲面 $\mathcal{B}_t$ を選ぶ．そのとき，角運動量は次で定義される：

$$J \equiv -Q_{\mathsf{m}} = -\int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\, u_a\, T^{ab}_{\rm BY}\, \mathsf{m}_b = \int_{\mathcal{B}_t} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\, j_A\, \mathsf{m}^A\,. \tag{4.173}$$

以下では，2.4.4 節と同様，示量性変数の密度量である ϵ や j_A に対して，$(d-2)$ 次元の空間的な体積要素の重み $\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}$ をかけたものを，

$$\tilde{\epsilon} \equiv \sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,\epsilon\,, \quad \tilde{j}_A \equiv \sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,j_A \tag{4.174}$$

のように，チルダ付きの記号で表すことにする．

4.2.3 統計集団と作用

以上の準備のもとにいよいよ Euclid 化を行う．時間的な Killing ベクトル場 $\mathsf{t} = \mathsf{t}^\mu\,\partial_\mu$ を持つ定常的な Lorentz 多様体 $\mathcal{M}$ の計量を

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t^2 + h_{ij}(\boldsymbol{x})\left[\mathrm{d}x^i + N^i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\right]\left[\mathrm{d}x^j + N^j(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}t\right]$$
$$[\,N,\,N^i \text{ および } h_{ij} \text{ は } t \text{ に依らない } \boldsymbol{x} \equiv (x^i) \text{ のみの関数}\,] \tag{4.175}$$

とすると，Euclid 化された多様体 $\mathcal{M}_{\mathrm{E}}$ の計量は

$$\mathrm{d}s_{\mathrm{E}}^2 = N^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\tau^2 + h_{ij}(\boldsymbol{x})\left[\mathrm{d}x^i - \mathrm{i}N^i(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\tau\right]\left[\mathrm{d}x^j - \mathrm{i}N^j(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\tau\right] \tag{4.176}$$

で与えられる．ここで，虚時間 $\tau = \mathrm{i}t$ は周期的であるとし，その周期を β_0 とおく．Lorentz 多様体の境界の時間的超曲面 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_t \times \mathbb{R}$ は，Euclid 化の後 $\mathcal{B}_{\mathrm{E}} = \mathcal{B}_\tau \times S^1$ となる（S^1 は周長 $\beta_0 N$ の円）．ここで $\mathcal{B}_\tau \simeq \mathcal{B}_t$（同相）である．

このとき，Euclid 化された作用 $I_{\mathrm{grav,E}}$ ［(4.153) 式参照］は

$$\begin{aligned}
I_{\mathrm{grav,E}} &= \frac{\beta_0}{16\pi G}\int_{\Sigma_\tau}\mathrm{d}^{d-1}x\,\sqrt{h}\,N\,(-R + 2\,\Lambda) \\
&\quad + \beta_0\int_{\mathcal{B}_\tau}\mathrm{d}^{d-2}x\left(N\,\tilde{\epsilon} - \frac{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}\,N\,\mathsf{r}^\mu\,\nabla_u u_\mu}{8\pi G}\right) \\
&= \beta_0\int_{\Sigma_\tau}\mathrm{d}^{d-1}x\left(-\mathrm{i}\pi^{ij}\,\partial_\tau h_{ij} + N\,\mathcal{H} + N^i\,\mathcal{H}_i\right) \\
&\quad + \beta_0\int_{\mathcal{B}_\tau}\mathrm{d}^{d-2}x\left(N\,\tilde{\epsilon} - N^A\,\tilde{j}_A\right)
\end{aligned} \tag{4.177}$$

となる．ここで，Σ_τ は τ 一定の $d-1$ 次元超曲面である．この変分は

$$\begin{aligned}
\delta I_{\mathrm{grav,E}} &= \frac{\beta_0}{16\pi G}\int_{\Sigma_\tau}\mathrm{d}^{d-1}x\,\sqrt{g}\left(G^{\mu\nu} + \Lambda\,g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
&\quad - \beta_0\int_{\mathcal{B}_\tau}\mathrm{d}^{d-2}x\left[-\tilde{\epsilon}\,\delta N + \tilde{j}_A\,\delta N^A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB}\right]
\end{aligned} \tag{4.178}$$

で与えられる．従って，この作用の古典解は，境界 $\mathcal{B}_\tau$ 上で N, N^A, $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ の値を固定して $\mathcal{M}_{\mathrm{E}}$ 内部の（Euclid 版）Einstein 方程式を解いたものである（τ には依らない）．

このとき，$I_{\mathrm{grav,\,E}}$ に古典解を入れた**古典作用** Γ_{grav} は，

$$\Gamma_{\rm grav} \equiv I_{\rm grav,E}\big|_{\rm cl} \tag{4.179}$$

で与えられる．(4.178) の右辺 1 行目が古典解に対しては消えるので，

$$\delta\Gamma_{\rm grav} = -\beta_0 \int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x \left[-\tilde{\epsilon}\,\delta N + \tilde{j}_A\,\delta N^A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB} \right] \tag{4.180}$$

となる．これを見ると分かるように，$\Gamma_{\rm grav}$ は $\mathcal{B}_\tau$ 上の関数 $\{N,\, N^A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}\}$ を引数とする汎関数になっている．ここで，N を固定することは境界における虚時間のスケールを固定すること，つまり境界における温度を固定することに相当していることに注意しよう．また，後で見るように，N^A を固定することは，（角）運動量の熱力学的共役量である（角）速度を固定することに対応する．こうして，$\Gamma_{\rm grav}[N,\, N^A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}]$ は，示強的熱力学変数のみに依存した大正準集団の熱力学ポテンシャルになっていることが分かる*8)．なお，境界上で $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ を固定することは境界 $\mathcal{B}_\tau$ の形や大きさを固定することに対応する．

一方，小正準集団を扱う際には，温度に対応するラプス関数 N や速度に対応するシフトベクトル N^A を固定する代わりに，準局所エネルギー密度 $\tilde{\epsilon}$ と準局所運動量密度 $\tilde{j}_A$［(4.173) 参照］を固定する必要がある．そこで，

$$\begin{aligned} I_{\rm mc,E} &\equiv I_{\rm grav,E} - \beta_0 \int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x\,\left(N\,\tilde{\epsilon} - N^A\,\tilde{j}_A\right) \\ &= \beta_0 \int_{\Sigma_\tau} {\rm d}^{d-1}x\,\left(-{\rm i}\pi^{ij}\,\partial_\tau h_{ij} + N\,\mathcal{H} + N^i\,\mathcal{H}_i\right) \end{aligned} \tag{4.181}$$

という Legendre 変換を行う．$I_{\rm mc,E}$ の変分は

$$\begin{aligned} \delta I_{\rm mc,E} = \frac{\beta_0}{16\pi G} &\int_{\Sigma_\tau} {\rm d}^{d-1}x\,\sqrt{g}\,\left(G^{\mu\nu} + \Lambda\,g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \\ &- \beta_0 \int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x \left[N\,\delta\tilde{\epsilon} - N^A\,\delta\tilde{j}_A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB}\right], \end{aligned} \tag{4.182}$$

で与えられる．従って，この作用 $I_{\rm mc,E}$ の古典解は，境界 $\mathcal{B}_\tau$ 上で $\tilde{\epsilon},\, \tilde{j}_A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}$ の値を固定して $\mathcal{M}_{\rm E}$ 内部の（Euclid 版）Einstein 方程式を解いたものに確かになっている．対応する古典作用

$$\Gamma_{\rm mc} \equiv I_{\rm mc,E}\big|_{\rm cl} \tag{4.183}$$

の変分は次で与えられる：

$$\delta\Gamma_{\rm mc} = -\beta_0 \int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x \left[N\,\delta\tilde{\epsilon} - N^A\,\delta\tilde{j}_A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB}\right]. \tag{4.184}$$

*8) $\Gamma_{\rm grav}/\beta_0$ がいわゆる Gibbs ポテンシャルに相当する．なお，示強性，示量性の用語については注意が必要である．(4.172) 式の後の記述を参照せよ．

これはまさに小正準集団の熱力学ポテンシャル [= −(エントロピー)] の変分の形をしている．そこで，以下，

$$S \equiv -\Gamma_{\rm mc}\left[\tilde{\epsilon},\, \tilde{j}_A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}\right] \tag{4.185}$$

を重力系のエントロピーと定義する．

以上の議論で現れた統計集団と境界で固定する変数および Euclid 化された作用をまとめておく：

統計集団	固定する量	境界で固定する変数	作用
大正準集団	温度,（角）速度	$\left\{N,\, N^A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}\right\}$	$I_{\rm grav,E}$
小正準集団	エネルギー,（角）運動量	$\left\{\tilde{\epsilon},\, \tilde{j}_A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}\right\}$	$I_{\rm mc,E}$

4.2.4　イベントホライズンがあるとき

上の議論では $\mathcal{M}_{\rm E} = \Sigma_\tau \times S^1$ の内部に特異な構造が無いとしていた．しかしながら，Lorentz 多様体 $\mathcal{M}$ にイベントホライズン $\mathcal{H}$ がある場合には，Euclid 化する際に特異性が現れる．実際，$\mathcal{H}$ 上の同じヌル測地線に属する任意の 2 点間の測地距離はゼロであるため，Euclid 化するとそれぞれの測地線がすべて 1 点に潰れてしまう．従って，イベントホライズンを持つ Lorentz 多様体はホライズンの外側の領域だけが Euclid 化でき，ホライズン $\mathcal{H}$ 自身はその中で τ 方向の S^1 が潰れた余次元 2 の面となる．

このことをもう少し具体的にみるために，今仮定として，Σ_τ 上のホライズンの位置がラプス N を用いて $N(\boldsymbol{x}) = 0$ と表すことができ，さらに空間座標 $\boldsymbol{x}$ を $\mathcal{H} \cap \Sigma_\tau$ で $N^i = 0$ となるように選べたとする．このとき，$\mathcal{H}$ 近傍の計量は

$$ds_{\rm E}^2 \approx N^2(\boldsymbol{x})\, d\tau^2 + h_{ij}(\boldsymbol{x})\, dx^i\, dx^j \tag{4.186}$$

となる．$N(\boldsymbol{x})$ は τ に依らないため，$\mathcal{M}_{\rm E}$ における N 一定面上の τ の軌道は，周長が $\beta_0 N(\boldsymbol{x})$ の S^1 となる（図 4.3）．$\mathcal{H}$ では S^1 が潰れるため，一般には円錐特異点 (conical singularity) が現れる．円錐特異点が現れると，そこで曲率が発散し，低エネルギー有効理論である Einstein 重力理論の適用範囲を超えてしまう．そこで，円錐特異点が現れないことを要請し，τ の周期 β_0 をうまく調節することにする．それには，N 一定の超曲面に直交する単位法ベクトル n^i

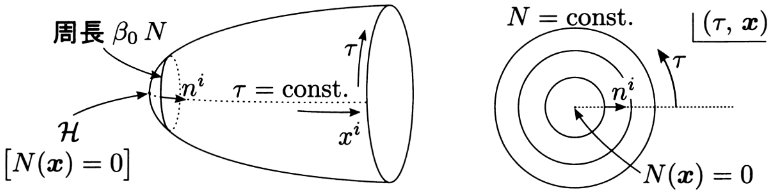


図 4.3　Euclid 化された空間の $\mathcal{H}$ 近傍を表した図．$N(\boldsymbol{x}) = 0$ の場所で τ 方向の S^1 が潰れるが円錐特異点は生じないとする．

を用いて

$$n^i\,\partial_i\big[\beta_0\,N(\boldsymbol{x})\big]=2\pi\quad(\boldsymbol{x}\to\mathcal{H}\text{の極限で})\tag{4.187}$$

という条件を置けばよい*9)．ここで，(4.186) から単位ベクトル n^i が

$$n^i=\frac{h^{ij}\,\partial_j N}{\sqrt{h^{kl}\,\partial_k N\,\partial_l N}}\tag{4.188}$$

と書けることと，(Lorentz 計量を用いたときの）表面重力の公式 (1.203)

$$\kappa=\sqrt{h^{ij}\,\partial_i N\,\partial_j N}\Big|_{\mathcal{H}}\tag{4.189}$$

を用いると，円錐特異点がない条件は次のように書ける：

$$\beta_0=\frac{2\pi}{\kappa}\,.\tag{4.190}$$

4.2.5 Bekenstein–Hawking エントロピー

この節では，イベントホライズン $\mathcal{H}$ が存在するときのエントロピーを計算する．基本は公式 (4.185) を使えばよいのだが，しかしこれはもとの Lorentz 多様体にホライズンがなく，Euclid 化後も内部に特異な構造を持たないとしていた．だが今の場合は，$\mathcal{M}_{\mathrm{E}}$ 内部の S^1 が $\mathcal{H}$ で潰れてしまっている．そこで，正則化を行う．具体的には，まずホライズン近傍に $N(\boldsymbol{x})=\varepsilon\ (>0)$ の点からなる超曲面 $\mathcal{H}^\varepsilon_{\mathrm{E}}$ を導入し，$\mathcal{H}^\varepsilon_{\mathrm{E}}$ と $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ で挟まれた領域 $\mathcal{M}^\varepsilon_{\mathrm{E}}$ を考える（図 4.4）．そして，すべての計算を行った後で $\varepsilon\to 0$ の極限をとる．なお，新たに導入した境界 $\mathcal{H}^\varepsilon_{\mathrm{E}}$ はあくまで仮想的な境界であり，この上で境界条件は課さないため，$\mathcal{H}^\varepsilon_{\mathrm{E}}$ 上に Gibbons–Hawking 項などの境界項を新たに導入することはしない．

このとき，正則化された Euclid 作用

$$I^\varepsilon_{\mathrm{grav,E}}\equiv\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}^\varepsilon_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}^d x\sqrt{g}\,(-R+2\,\Lambda)-\frac{1}{8\pi G}\int_{\mathcal{B}_{\mathrm{E}}}\mathrm{d}^{d-1}x\sqrt{\mathsf{h}}\,\mathsf{K}+I_{0,\mathrm{E}}\tag{4.191}$$

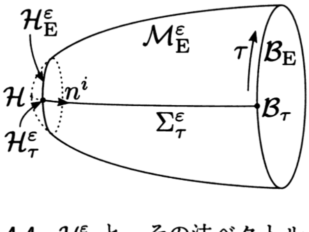


図 4.4 $\mathcal{H}^\varepsilon_{\mathrm{E}}$ と，その法ベクトル n^i．

*9) この式は，半径 r の円周 $2\pi r$ を r で微分すると ($\partial_r=n^i\,\partial_i$)，$2\pi$ になるということを表している．半径と円周の比が 2π にならない場合には円錐状の特異点が生じてしまう．

において，$\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ 上で上手くいっていた Einstein–Hilbert 作用と Gibbons–Hawking 項との相殺が $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\mathrm{E}}$ 上では不完全となり，

$$
\begin{aligned}
I^{\varepsilon}_{\mathrm{grav,E}} = \beta_0 \int_{\Sigma^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-1}x \left(-\mathrm{i}\pi^{ij}\,\partial_\tau h_{ij} + N\,\mathcal{H} + N^i\,\mathcal{H}_i\right) \\
+ \beta_0 \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathrm{d}^{d-2}x \left(N\,\tilde{\epsilon} - N^A\,\tilde{j}_A\right) \\
- \beta_0 \int_{\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{q}\left(\frac{n^i\,\partial_i N}{8\pi G} + \frac{2}{\sqrt{h}}\,n_i\,N_j\,\pi^{ij}\right)
\end{aligned}
$$

$\Big(q_{ab}$ は $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\mathrm{E}}$ 上の誘導計量で $\sqrt{q} \equiv \sqrt{\det(q_{ab})}$，$n^i$ は図 4.4 の向き$\Big)$

(4.192)

となる．ここで，$\Sigma^{\varepsilon}_{\tau} \equiv \Sigma_\tau \cap \mathcal{M}^{\varepsilon}_{\mathrm{E}}$, $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\tau} \equiv \Sigma_\tau \cap \mathcal{H}^{\varepsilon}_{\mathrm{E}}$ である．これから小正準集団に対応したものを作れば

$$
\begin{aligned}
I^{\varepsilon}_{\mathrm{mc,E}} &\equiv I^{\varepsilon}_{\mathrm{grav,E}} - \beta_0 \int_{\mathcal{B}_\tau} \mathrm{d}^{d-2}x \left(N\,\tilde{\epsilon} - N^A\,\tilde{j}_A\right) \\
&= \beta_0 \int_{\Sigma^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-1}x \left(-\mathrm{i}\pi^{ij}\,\partial_\tau h_{ij} + N\,\mathcal{H} + N^i\,\mathcal{H}_i\right) \\
&\quad - \beta_0 \int_{\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{q}\left(\frac{n^i\,\partial_i N}{8\pi G} + \frac{2}{\sqrt{h}}\,n_i\,N_j\,\pi^{ij}\right)
\end{aligned} \tag{4.193}
$$

となる．このとき，$I^{\varepsilon}_{\mathrm{mc,E}}$ の変分は次で与えられる*10)：

$$
\begin{aligned}
\delta I^{\varepsilon}_{\mathrm{mc,E}} = \frac{\beta_0}{16\pi G} \int_{\Sigma^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-1}x\,\sqrt{g}\left(G^{\mu\nu} + \Lambda\,g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
- \beta_0 \int_{\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-2}x \left[N\,\delta\tilde{\epsilon} - N^A\,\delta\tilde{j}_A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB}\right] \\
+ \frac{\beta_0}{16\pi G} \int_{\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-2}x\,N\sqrt{q}\left(n^\mu\,\mathsf{h}^{\nu\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} - \mathsf{h}^{\rho\nu}\,n^\mu\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu}\right).
\end{aligned}
$$

(4.194)

$I^{\varepsilon}_{\mathrm{mc,E}}$ に古典解を代入したものは次のようにして求められる．まず，バルク部分は定常時空 (4.175) を考えていることから $\partial_\tau h_{ij} = 0$ であり，また，古典解を扱っていることから $\mathcal{H} = 0 = \mathcal{H}_i$ となる．従って，(4.193) の境界項のみが値を持つ．今は $\varepsilon \to 0$ の極限で $\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\mathrm{E}}$ 上で $N_j \to 0$ となるように座標系を選んでいたため［(4.186) の上を参照］，結局

*10) 一方，$I^{\varepsilon}_{\mathrm{grav,E}}$ の変分は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\delta I^{\varepsilon}_{\mathrm{grav,E}} = \frac{\beta_0}{16\pi G} \int_{\Sigma^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-1}x\,\sqrt{g}\left(G^{\mu\nu} + \Lambda\,g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu} \\
- \beta_0 \int_{\mathcal{B}^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-2}x \left[-\tilde{\epsilon}\,\delta N + \tilde{j}_A\,\delta N^A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB}\right] \\
+ \frac{\beta_0}{16\pi G} \int_{\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\tau}} \mathrm{d}^{d-2}x\,N\sqrt{q}\left(n^\mu\,\mathsf{h}^{\nu\sigma}\nabla_\sigma\delta g_{\mu\nu} - \mathsf{h}^{\rho\nu}\,n^\mu\nabla_\mu\delta g_{\rho\nu}\right).
\end{aligned}
$$

$$\Gamma^{\varepsilon}_{\rm mc} \equiv I^{\varepsilon}_{\rm mc,E}\Big|_{\rm cl} = -\frac{\beta_0}{8\pi G}\int_{\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\rm E}} {\rm d}^{d-2}x\,\sqrt{q}\,n^i\,\partial_i N\Big|_{\rm cl} \tag{4.195}$$

のみを評価すればよいことが分かる．これは，円錐特異点が出ない条件 (4.187) を用いると，$\varepsilon \to 0$ の極限で

$$\begin{aligned}\Gamma^{\varepsilon}_{\rm mc} &\simeq -\frac{\beta_0}{8\pi G}\int_{\mathcal{H}^{\varepsilon}_{\tau}} {\rm d}^{d-2}x\sqrt{q}\,\frac{2\pi}{\beta_0} = -\frac{1}{4G}\int_{\mathcal{H}_{\tau}} {\rm d}^{d-2}x\,\sqrt{q} \\ &\equiv -\frac{A}{4G}\end{aligned} \tag{4.196}$$

となる．ここで，$\mathcal{H}_\tau \equiv \mathcal{H} \cap \Sigma_\tau$ であり，A は $\mathcal{H}_\tau$ の面積，つまりホライズンの面積である．上の計算のポイントは，$\varepsilon \to 0$ の極限で円錐特異点のない滑らかな Euclid 時空が得られても，作用の境界項は 0 にならないという点である．こうして，小正準集団の熱力学的ポテンシャルの準古典近似として，エントロピーが

$$S_{\rm BH} \equiv -\lim_{\varepsilon\to 0}\Gamma^{\varepsilon}_{\rm mc} = \frac{A}{4G} \tag{4.197}$$

と求まる．ここでホライズン面積 A は $\mathcal{B}_\tau$ 上の境界値 $\left(\tilde{\epsilon},\, \tilde{j}_A,\, \boldsymbol{\sigma}_{AB}\right)$ の汎関数であることに注意しよう．

ホライズン面積とエントロピーの間のこの関係式は，任意の次元の Einstein 重力理論の定常ブラックホール解に対して普遍的に成り立つと考えられており，上の $S_{\rm BH}$ は **Bekenstein–Hawking エントロピー**と呼ばれる．

ここで，作用の値を有限にするために差し引いた作用 I_0 はエントロピーには影響を与えていないという点に注意しよう．これは，正準集団のアプローチを用いた際にも指摘されていたが[31]，ここで考えた小正準集団のアプローチでは，作用を (4.193) のように書くと境界 $\mathcal{B}$ における境界項がそもそも相殺していたため，当然の結果である．しかし，以下の具体例で見るように，I_0 は準局所エネルギーを有限にするためには必要な項である．

4.2.6 境界上の熱力学第一法則

(4.194) 式において，$\varepsilon \to 0$ の極限をとると，ホライズンからの寄与が消え，

$$\begin{aligned}\delta S_{\rm BH} &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\delta\Gamma^{\varepsilon}_{\rm mc} \\ &= \beta_0\int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x\left[N\,\delta\tilde{\epsilon} - N^A\,\delta\tilde{j}_A + \frac{N\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}{2}\,\tau^{AB}\,\delta\boldsymbol{\sigma}_{AB}\right]\end{aligned} \tag{4.198}$$

という関係式が得られる．これは，$\mathcal{B}_\tau$ 上の熱力学系に対する Gibbs 関係式と解釈できることが次のように分かる．まず，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_\tau$ において関数 $T(\boldsymbol{x})$ を

$$\frac{1}{T(\boldsymbol{x})} \equiv \frac{\delta S_{\rm BH}}{\delta\tilde{\epsilon}(\boldsymbol{x})} = N(\boldsymbol{x})\,\beta_0 \tag{4.199}$$

と定義しよう．β_0 は Killing パラメーターの時間で測った温度の逆数であり，

(4.199) は，ちょうど「局所的な観測者の（固有）温度 $T(\boldsymbol{x})$」と「Killing パラメーターの時間で測った温度 $\mathsf{T} = 1/\beta_0$」を関係づける Tolman の法則 ($\mathsf{T} = N\,T$) の形をしている［(2.90) 式参照］．つまり，準局所エネルギー密度 $\tilde{\epsilon}$ の熱力学共役量 $1/T(\boldsymbol{x})$ は，$\mathcal{B}$ 上の観測者の固有温度の逆数と解釈できることが分かる．さらに，

$$\Omega^A(\boldsymbol{x}) \equiv -T(\boldsymbol{x})\,\frac{\delta S_{\rm BH}}{\delta \tilde{j}_A(\boldsymbol{x})} = N^A/N \tag{4.200}$$

という量を定義すると，これは $\mathcal{B}$ 上の観測者の固有時間に関する（角）速度と解釈できることが分かる．実際，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -N^2(r,\,\theta)\,\mathrm{d}t^2 + h_{rr}(r,\,\theta)\,\mathrm{d}r^2 + h_{\theta\theta}(r,\,\theta)\,\mathrm{d}\theta^2 \\ &\quad + h_{\varphi\varphi}(r,\,\theta)\left[\mathrm{d}\varphi^2 + N^\varphi(r,\,\theta)\,\mathrm{d}t\right]^2 \end{aligned} \tag{4.201}$$

という時空を考えると，シフトベクトルの φ 成分 N^φ は，(Killing パラメーターの時間で測った）角速度である．$\mathcal{B}$ 上の観測者の固有時間で測った角速度はこれを $N(\boldsymbol{x})$ で割ったものであるので，$\Omega^\varphi = N^\varphi/N$ は $\mathcal{B}$ 上の観測者の固有時間に関する（角）速度であることが理解できる．このように，$\mathcal{B}_\tau$ 上の熱力学系の "温度" を T，"エネルギー密度" を $\tilde{\epsilon}$，"（角）速度" を N^A/N，"（角）運動量" を $\tilde{j}_A$ と同定すれば，(4.198) は，あたかも $\mathcal{B}_\tau$ 上の熱力学系の Gibbs 関係式であるかのように解釈することができる．

ここでは定常軸対称な時空のみを考えたが，より一般に Einstein–Maxwell 理論を考えることで，上の Gibbs の関係式に保存電荷に依存する項を導入することもできる．さらに，上で説明した形式は非定常時空の場合にも自然に拡張ができ，非定常時空のダイナミクスを $(d-1)$ 次元の境界 $\mathcal{B}$ 上で定義された流体力学（非平衡熱力学）と対応付けることができる．この対応は**流体／重力対応**と呼ばれている（興味のある読者はレビュー論文 [47] およびそこで引用されている文献を参照されたい）．

以上をまとめると，熱力学量は古典解の計量から次のように計算できる：

準局所エネルギー密度	$\tilde{\epsilon} = -\frac{\sqrt{h}}{8\pi G}\,(k - k_0)$
温度	$T = \kappa/(2\pi N)$
準局所（角）運動量密度	$\tilde{j}_A = -\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{h}}\,\mathsf{r}_j\,\pi_A{}^j$
（角）速度	N^A/N
応力テンソル	$\tau^{AB} = -\frac{1}{8\pi G}\left[(k-k_0)^{AB} - (r\cdot a + k - k_0)\,\boldsymbol{\sigma}^{AB}\right]$

4.2.7 具体例

以下では，いくつかの Euclid 化された時空を例に，準古典近似を用いて様々な熱力学量を計算する．

例 1：Rindler 時空

宇宙項の無い d 次元 Einstein 重力理論において，次の形の時空を考える：

$$ds^2 = -N^2(y)\,\mathrm{d}t^2 + \alpha^2(y)\,\mathrm{d}y^2 + \delta_{AB}\,\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B \quad (0 \le y \le 1)\,. \tag{4.202}$$

ここで，$y=1$ を境界 $\mathcal{B}$ とし，$y=0$ にホライズン $\mathcal{H}$ があるものとする $[N(0)=0]$．境界 $\mathcal{B}$ では，次の Dirichlet 境界条件を課す[*11)]：

$$N(1) = N_{\mathrm{b}} = (\text{正定数})\,. \tag{4.203}$$

真空の Einstein 方程式は

$$\partial_y \ln\bigl[N'(y)/\alpha(y)\bigr] = 0 \quad \Rightarrow \quad N'(y) = \kappa_{\mathrm{R}}\,\alpha(y) \quad (\kappa_{\mathrm{R}}：\text{定数}) \tag{4.204}$$

となるため，新たな座標 $z \equiv \int^y \mathrm{d}y'\,\alpha(y')$ を定義すると，古典解は

$$ds^2 = -\kappa_{\mathrm{R}}^2\,(z-z_h)^2\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 + \delta_{AB}\,\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B \tag{4.205}$$

と求まる．これは，d 次元 Rindler 時空の計量 (3.34) である．z_h は積分定数であり，z の原点の移動により $z_h = 0$ とする．このとき，元の座標の $y=0$ にあったホライズンは $z=0$ に写像され，$y=1$ にあった境界 $\mathcal{B}$ を $z=z_{\mathrm{b}}$ とすると，Dirichlet 境界条件 (4.203) から，積分定数の値は $\kappa_{\mathrm{R}} = N_{\mathrm{b}}/z_{\mathrm{b}}$ である．

ここで，$\tau = \mathrm{i}t$ $(0 \le \tau < \beta_0)$ として Euclid 化すれば

$$ds^2 = \kappa_{\mathrm{R}}^2\,(z-z_h)^2\,\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}z^2 + \delta_{AB}\,\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B \tag{4.206}$$

である．このとき，$z=0$ で円錐特異点が出ない条件から，τ の周期は

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\kappa_{\mathrm{R}}} = \frac{2\pi\,z_{\mathrm{b}}}{N_{\mathrm{b}}} \tag{4.207}$$

と定まり，（$z=z_{\mathrm{b}}$ にいる観測者の感じる）温度 T は (4.199) より

$$T \equiv \beta^{-1} = \frac{1}{N_{\mathrm{b}}\,\beta_0} = \frac{1}{2\pi z_{\mathrm{b}}} \tag{4.208}$$

と求まる．これは 3.2.1 節で求めた Unruh 温度に一致する．

なお，この場合には，$\boldsymbol{\sigma}_{AB} = \delta_{AB}$ であり，$\mathcal{B}$ の単位法ベクトルが $n^\mu\,\partial_\mu = \partial_z$ と書けることから，$k = \partial_z \ln\sqrt{\boldsymbol{\sigma}} = 0$ となる．従って，準局所エネルギーは 0 になる（ここでは作用 I_0 を導入する必要が無かったため $I_0 = 0$ とした）．

また，今 $\mathcal{B}_\tau$ の $(d-2)$ 次元体積が無限であるため，全エントロピーは発散するが，$\mathcal{B}_\tau$ の中の任意の体積 V の領域に限定すると $S_{\mathrm{BH}} = V/4G$ となる．つま

*11） 大正準集団を扱う際には，境界 $\mathcal{B}$ 上で $\{N,\,N^A,\,\boldsymbol{\sigma}_{AB}\}$ を固定するという境界条件をとるが，(4.202) の仮定を置いた時点で，すでに，$\mathcal{B}$ 上で $\boldsymbol{\sigma}_{AB} = \delta_{AB}$ かつ $N^A = 0$ が成り立っているため，ここではラプス関数の境界条件のみを指定した．

り，エントロピー密度は $s=1/4G$ である．また，圧力 P は次のように求まる：

$$P = T\,\frac{\partial S}{\partial V} = T\,s = \frac{1}{8\pi G\,z_{\mathrm{b}}}\,. \tag{4.209}$$

例 2：AdS–Schwarzschild ブラックホール

負の宇宙定数[*12)] $\Lambda \equiv -(d-1)\,(d-2)/\ell^2$ がある場合の $d\ (\geq 4)$ 次元 Einstein 重力理論において，球面 S^{d-2} と時間方向の $\mathbb{R}$ の直積の形を持つ境界 $\mathcal{B}$ をとった場合を考える：

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(r)\,\mathrm{d}t^2 + f^{-2}(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2\,. \tag{4.210}$$

そして，境界 $\mathcal{B}\ (r=r_{\mathrm{b}})$ 上で境界条件

$$N|_{\mathcal{B}} = N_{\mathrm{b}} \quad (N_{\mathrm{b}}：\text{正定数}) \tag{4.211}$$

を課したときの（大）正準集団を考える[*13)]．球対称性から誘導計量 $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ は r_{b} だけで指定され，熱力学系を特徴付けるパラメーターは $(N_{\mathrm{b}},\,r_{\mathrm{b}})$ となる．

上の境界条件を満たす運動方程式の解は

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2(r)\,\mathrm{d}t^2 + N^{-2}(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2\,, \tag{4.212}$$

$$N(r) \equiv \sqrt{1 - \frac{\mu(N_{\mathrm{b}},r_{\mathrm{b}})}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{\ell^2}} \tag{4.213}$$

と求まる．ここで，関数 $\mu(N_{\mathrm{b}},r_{\mathrm{b}})$ は

$$N(r_{\mathrm{b}}) = \sqrt{1 - \frac{\mu(N_{\mathrm{b}},r_{\mathrm{b}})}{r_{\mathrm{b}}^{d-3}} + \frac{r_{\mathrm{b}}^2}{\ell^2}} = N_{\mathrm{b}} \tag{4.214}$$

で定まる関数である．これは，AdS–Schwarzschild ブラックホールと呼ばれる時空である．とくに，$\ell \to \infty$ の極限では通常の Schwarzschild ブラックホールになる．ホライズンは $r=r_{\mathrm{H}}$ ［r_{H}：$N^2(r)=0$ の最大の実根］で与えられる．また，$\mu(N_{\mathrm{b}},r_{\mathrm{b}}) \to 0$ の極限では，$r_{\mathrm{H}} \to 0$ となりホライズンは無くなる．このとき得られる時空は，$\ell < \infty$ なら AdS 時空，$\ell = 0$ なら Minkowski 時空となる．

ここで，$\tau = \mathrm{i}t\ (0 \leq \tau < \beta_0)$ として Euclid 化すれば

$$\mathrm{d}s^2 = N^2(r)\,\mathrm{d}\tau^2 + N^{-2}(r)\,\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2\,, \tag{4.215}$$

$$N(r) \equiv \sqrt{1 - \frac{\mu(N_{\mathrm{b}},r_{\mathrm{b}})}{r^{d-3}} + \frac{r^2}{\ell^2}} \tag{4.216}$$

---

*12)　ここでは AdS–Schwarzschild ブラックホールの熱力学的性質を調べる．以下の結果は，AdS 半径 $\ell \to \infty$ の極限で通常の漸近的平坦な Schwarzschild ブラックホールのものに一致するため，漸近的平坦な場合の結果のみに興味がある読者は常に $\ell \to \infty$ として読み進めることが可能である．ただ，ℓ を有限にしても，解析の複雑さはそれ程変わらない．

*13)　この例でも，誘導計量 $\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ および N^A は，(4.210) の仮定から $\boldsymbol{\sigma}_{AB}\,\mathrm{d}x^A\,\mathrm{d}x^B = r_{\mathrm{b}}^2\,\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2$ かつ $N^A=0$ となっており，誘導計量を特徴づけるパラメーター r_{b} とラプス関数だけの Dirichlet 境界条件で（大）正準集団が特徴づけられる．

となる．$z=0$ で円錐特異点が出ない条件 (4.190) から，τ の周期 β_0 は

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{N(r_{\rm H})\,\partial_r N(r_{\rm H})} = \frac{4\pi\, r_{\rm H}}{d-3+(d-1)\,\frac{r_{\rm H}^2}{\ell^2}} \tag{4.217}$$

と決まる．また，境界 $\mathcal{B}$ 上で Brown–York テンソルを計算すると，

$$T_{\rm BY}^{ab} = \epsilon\, u^a\, u^b + P\,\boldsymbol{\sigma}^{ab}\,, \quad \epsilon \equiv -\frac{1}{8\pi G}\,(k-k_0) = -\frac{(d-2)\,N_{\mathcal{B}}}{8\pi G\, r_{\rm b}} + \frac{k_0(r_{\rm b})}{8\pi G}\,,$$
$$P = \frac{d-3-\frac{(d-3)\mu}{2\,r_{\rm b}^{d-3}}+\frac{(d-2)\,r_{\rm b}^2}{\ell^2}}{8\pi G\, r_{\rm b}\, N_{\mathcal{B}}} - \frac{1}{8\pi G}\,\frac{\partial\big[r_{\rm b}^{\frac{d-2}{2}}\,k_0(r_{\rm b})\big]}{\partial r_{\rm b}^{\frac{d-2}{2}}} \tag{4.218}$$

となる*14)．ここで，(4.42) で仮定したように，k_0 はラプス関数 $N_{\rm b}$ には依らず，$r_{\rm b}$ のみの関数である．

4.2.6 節の議論から，この（大）正準集団は次の熱力学量を持つ熱力学系に対応する：

$$T = \frac{d-3+(d-1)\,\frac{r_{\rm H}^2}{\ell^2}}{4\pi\, r_{\rm H}\, N_{\rm b}}\,, \tag{4.219}$$

$$\epsilon = -\frac{(d-2)\,N_{\mathcal{B}}}{8\pi G\, r_{\rm b}} + \frac{k_0(r_{\rm b})}{8\pi G}\,, \tag{4.220}$$

$$P = \frac{d-3-\frac{(d-3)\mu}{2\,r_{\rm b}^{d-3}}+\frac{(d-2)\,r_{\rm b}^2}{\ell^2}}{8\pi G\, r_{\rm b}\, N_{\mathcal{B}}} - \frac{1}{8\pi G}\,\frac{\partial\big[r_{\rm b}^{\frac{d-2}{2}}\,k_0(r_{\rm b})\big]}{\partial r_{\rm b}^{\frac{d-2}{2}}}\,. \tag{4.221}$$

ここで，温度 (4.219) は，$T_0 = N_{\rm b}\,T$ と規格化し直すと，$d=4$ 次元漸近的平坦な場合 $(\ell \to \infty)$ に，(3.54) で求めた Schwarzschild ブラックホールの Hawking 温度 $T_0 = 1/(8\pi GM)$ に一致する．一方，準局所エネルギー

$$E = \int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x\,\tilde{\epsilon} = -\frac{\Omega_{d-2}\, r_{\rm b}^{d-2}}{8\pi G}\left[\frac{(d-2)\,N_{\mathcal{B}}}{r_{\rm b}} - k_0\right]$$
$$\left[\Omega_{d-2} \equiv \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}：\text{単位球面 } S^{d-2} \text{ の面積}\right] \tag{4.222}$$

は，もし $k_0 = 0$ とすると $r_{\rm b} \to \infty$ の極限で発散してしまう点に注意しよう．この発散を抑えるため，$\mu(\beta, r_{\rm b}) = 0$ とした時空 $g_{\mu\nu}^{(0)}$ を用いて，k_0 を評価する．つまり

$$k_0 = \frac{(d-2)\sqrt{1+\frac{r_{\rm b}^2}{\ell^2}}}{r_{\rm b}} \tag{4.223}$$

とする．このとき，$r_{\rm b} \to \infty$ の極限で準局所エネルギーは

$$E = \int_{\mathcal{B}_\tau} {\rm d}^{d-2}x\,\tilde{\epsilon} \to \frac{(d-2)\,\Omega_{d-2}\,\mu(N_{\rm b}, r_{\rm b})}{16\pi G} \quad (r_{\rm b} \to \infty) \tag{4.224}$$

と，有限の値になる．これは 4 次元の場合には，4.1.2 節で与えた ADM エネルギーに一致する．

*14) 圧力 P については，準局所エネルギー E を求めてから，エントロピーを固定，つまり，$r_{\rm H}$ あるいは μ を固定した下で $P = -\partial E/\partial(\Omega_{d-2}\, r_{\rm b}^{d-2})$ を計算するのが楽である．

第 5 章
時空の熱力学の一般論

本章では，前章までに得られた時空の熱的性質に関する様々な手がかりを用いて，時空と熱力学の間の対応関係を，より統一的な視点から議論する．

5.1 ブラックホール熱力学

前章までの議論から，ホライズンを持つ時空は，温度やエントロピーなど，様々な熱力学的性質を持つことが分かった．本節では，このような熱力学的性質を通常の熱力学と同様の枠組みから統一的に理解するため，**ブラックホール熱力学**の 4 法則を説明する．

通常の熱力学法則には次の 4 つの法則が成り立つ：

- **第ゼロ法則**： 保存量の熱力学的共役量は熱平衡状態では場所に依らず一定である．
- **第一法則**： $\delta E = \delta Q - P\,\delta V + \mu\,\delta N$.
- **第二法則**： 孤立系のエントロピーは時間とともに減少することはない．
- **第三法則**： 有限回の物理的試行で温度をゼロにすることはできない（Nernst の定理）．

実は，4 次元定常ブラックホールもこれと同様の以下の法則を満たす：

- **第ゼロ法則**： 定常ブラックホールの表面重力 κ，角速度 Ω_{H}，電位 Φ_{H} はイベントホライズン上の至る所で一定である．
- **第一法則**： ある定常ブラックホールが他の定常ブラックホールに変化する際，エネルギーの変化 δM，全角運動量の変化 δJ および全電荷の変化 δQ は次式を満たす：

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\,\delta A + \Omega_{\mathrm{H}}\,\delta J + \Phi_{\mathrm{H}}\,\delta Q\,. \tag{5.1}$$

- **第二法則**：（Hawking 輻射などの量子論的なものを除いた）古典的な過程

では，ブラックホールの面積 A は減少することはない．

- **第三法則**： 有限回の物理的試行で表面重力 κ を 0 にできない．

以下では，第ゼロ法則から第二法則について説明する．第三法則については，まだ決定的な証明は無いため本書ではこれ以上の説明を割愛する．

5.1.1 第ゼロ法則と第一法則

ここでは，4 次元 Einstein–Maxwell 理論の最も一般的な定常解である Kerr–Newman 解 (1.247) に対して第ゼロ法則と第一法則を確認する*1)．

まずは，電位 $\Phi_{\rm H}$ の定義を行う．$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を Maxwell 方程式

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu\,, \quad \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0 \tag{5.2}$$

の定常解とする．つまり，Killing ホライズン $\mathcal{H}^+$ の外部領域において，$\mathcal{H}^+$ に関する時間的 Killing ベクトル場 ξ^μ を用いて

$$\pounds_\xi A_\mu = \xi^\nu\,\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \xi^\nu\, A_\nu = 0 \tag{5.3}$$

が成り立っているとする．このとき，電場ベクトル $E_\mu \equiv F_{\mu\nu}\,\xi^\nu$ は，スカラー関数 $\Phi \equiv -A_\mu\,\xi^\mu$ を用いて，$E_\mu = -\partial_\mu \Phi$ と書ける．とくに，A_μ を無限遠方でゼロになるように選べば．Φ も無限遠方でゼロになる．原点をこのように選んだときの Φ の $\mathcal{H}^+$ における値 $\Phi_{\rm H}(x)$ を**ブラックホールの電位**と呼ぶ．

次に，角速度 $\Omega_{\rm H}$ を導入する．1.7.3 節で述べたイベントホライズンの性質 (3) より，漸近的平坦な定常ブラックホールの未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ は Killing ホライズンであり，かつ，回転している場合には軸対称性を持つ．つまり，時間発展を生成する Killing ベクトル場 $\mathsf{t} = \mathsf{t}^\mu\,\partial_\mu$ と，軸回転を生成する Killing ベクトル場 $\mathsf{m} = \mathsf{m}^\mu\,\partial_\mu$ を持つ．今，時空の等長変換群は t と m で生成されているため，Killing ホライズンのヌル法ベクトル場 ξ^μ は，一般にこれらの定数係数の線形結合として表されるはずである：

$$\xi^\mu = \mathsf{t}^\mu + \Omega_{\rm H}\,\mathsf{m}^\mu \quad (\Omega_{\rm H}\text{：定数})\,. \tag{5.4}$$

このときの定数係数 $\Omega_{\rm H}$ を**ブラックホールの角速度**と呼ぶ．t および m は，計量を不変に保つ Killing ベクトル場であるためホライズン上ではホライズンの接ベクトル場となる．さらに，ξ^μ がホライズンの法ベクトルであったことから，(5.4) を t_μ または m_μ と縮約し，ホライズン上で評価することで次式を得る：

$$\Omega_{\rm H}\left(-\mathsf{t}^\mu\,\mathsf{m}_\mu\right)|_{\mathcal{H}^+} = \mathsf{t}^\mu\,\mathsf{t}_\mu|_{\mathcal{H}^+}\,, \quad \Omega_{\rm H}\left(\mathsf{m}^\mu\,\mathsf{m}_\mu\right)|_{\mathcal{H}^+} = -\mathsf{t}^\mu\,\mathsf{m}_\mu|_{\mathcal{H}^+}\,. \tag{5.5}$$

---

*1) 1.5.2 節では分岐面の存在を仮定することで，κ がホライズン上で一定になることを示した．実は，次の 2 つの仮定からも κ が $\mathcal{H}^+$ 上で一定であることが証明できる [7], [48]：(i) 対象となるブラックホールは Einstein 方程式の定常解である，(ii) エネルギー運動量テンソルは支配的エネルギー条件を満たす．

では，実際に，Kerr–Newman 解において角速度 Ω_H と電位 Φ_H を求めてみよう．以下，Boyer–Lindquist 座標 (t, r, θ, φ) [(1.247) 式] を用いる．未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ は $r = r_+$ の場所にあるため，(5.5) から角速度は

$$\Omega_\mathrm{H} = -\frac{g_{tt}}{g_{t\varphi}}\bigg|_{\mathcal{H}^+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2} \tag{5.6}$$

と求まる．一方，電位 Φ_H は，(1.248) の $A_\mu(x)$ が無限遠方で 0 になることから

$$\Phi_\mathrm{H} = -A_\mu\,\xi^\mu\big|_{\mathcal{H}^+} = -\big(A_t + \Omega_\mathrm{H}\,A_\varphi\big) = \frac{r_+\,\bar{Q}}{r_+^2 + a^2} \tag{5.7}$$

と求まる．さらに，表面重力についても，Killing ベクトル場の表式 $\xi^\mu = \delta^\mu_t + \Omega_\mathrm{H}\,\delta^\mu_\varphi$ と公式 (1.200) を用いることで

$$\kappa = \frac{r_+ - GM}{r_+^2 + a^2}\left[= \frac{r_+ - r_-}{2\,(r_+^2 + a^2)}\right] \tag{5.8}$$

と求まる．このように，Kerr–Newman 解の場合に角速度だけでなく電位や表面重力が全て定数であることが分かり，第ゼロ法則が確認できた．

次に，Smarr 公式と呼ばれる関係式の導出と熱力学第一法則の確認を行う．Kerr–Newman 時空のホライズン面積は，$r = r_+$ かつ $t =$ 一定の超曲面上の誘導計量

$$q_{ab}\,\mathrm{d}x^a\,\mathrm{d}x^b = \Sigma\,\mathrm{d}\theta^2 + \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma}\,\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 \tag{5.9}$$

を用いて

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sqrt{\det(q_{ab})} = (r_+^2 + a^2)\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,\sin\theta \\ &= 4\pi\,\big(r_+^2 + a^2\big) \end{aligned} \tag{5.10}$$

と求まる．この式は，表面重力 (5.8) を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\kappa\,A}{4\pi} &= r_+ - GM = GM + (r_+ - 2GM)\,\frac{2GM\,r_+ - G\,\bar{Q}^2}{r_+^2 + a^2} \quad [\because\ \Delta(r_+) = 0] \\ &= GM - \frac{2GM\,a^2 + r_+\,G\,\bar{Q}^2}{r_+^2 + a^2} \quad [\because\ \Delta(r_+) = 0] \end{aligned} \tag{5.11}$$

とも書ける．ここで，角速度と電位の値

$$\Omega_\mathrm{H} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}\,, \qquad \Phi_\mathrm{H} = \frac{r_+\,\bar{Q}}{r_+^2 + a^2} \tag{5.12}$$

と $a = J/M$ を用いると質量 M に対する次の公式を得る：

$$M = 2\,\frac{\kappa}{2\pi}\,\frac{A}{4G} + 2\,\Omega_\mathrm{H}\,J + \Phi_\mathrm{H}\,\bar{Q}\,. \tag{5.13}$$

これは，Kerr–Newman 解に対する **Smarr 公式**と呼ばれる．

次に，面積 A を M と J と $\bar{Q}$ の関数とみなして変分をとる．公式

$$\delta r_+ = \delta(GM) + \frac{GM\,\delta(GM) - a\,\delta a - G\,\bar{Q}\,\delta\bar{Q}}{r_+ - GM}\,, \tag{5.14}$$

$$\delta a = \delta(J/M) = \frac{1}{M}\,\delta J - \frac{a}{M}\,\delta M \tag{5.15}$$

を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\delta A}{8\pi} &= \left(r_+\,\delta r_+ + a\,\delta a\right)\\ &= \frac{r^2+a^2}{r_+ - GM}\left[\delta(GM) - \frac{G\,a}{r^2+a^2}\,\delta J - \frac{G\,r_+\,\bar{Q}}{r^2+a^2}\,\delta\bar{Q}\right]\end{aligned} \tag{5.16}$$

となる．これを，Hawking 温度 $T_{\rm H} = \kappa/2\pi$ と Bekenstein–Hawking エントロピー $S_{\rm BH} = \delta A/4G$ を用いて書き直すと

$$\delta M = T_{\rm H}\,\delta S_{\rm BH} + \Omega_{\rm H}\,\delta J + \Phi_{\rm H}\,\delta\bar{Q}\,, \tag{5.17}$$

となり，熱力学の第一法則が確認できた．5.2.4 節では，Wald の Noether チャージを用いた一般的な手法からブラックホール熱力学の第一法則の導出を行う．

5.1.2 第一法則（物理的過程版）

ここでは，「最初定常であった 4 次元 Kerr ブラックホールにエネルギーや角運動量を持つ物体を投げ入れ，その後，十分に時間が経って時空は再び定常な Kerr ブラックホールになる」という過程における第一法則を示す [49]．ここでの証明が，前小節や 5.2.4 節における第一法則の証明と異なる点は，δM や δJ が，変化前と変化後の時空におけるエネルギーの差や角運動量の差ではなく，物体を投げ入れたことでホライズンを通り抜けたエネルギーや角運動量のフラックス積分を表しているという点である．

すべての操作を行う前の定常時空は Kerr 時空によって記述され，これは $T^{\mu\nu} = 0$ の真空である．Kerr 時空は時間的 Killing ベクトル t^μ と軸回転を生成する Killing ベクトル m^μ を持ち，以下，このときの未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ は分岐面 B を持つとする．今，ホライズンに物体を投げ入れるという操作を上の状態からの摂動として扱うが，摂動後は，エネルギー運動量テンソルはゼロでなくなり，物質場のエネルギー運動量ベクトルと角運動量ベクトル：

$$p^\mu \equiv -T^\mu{}_\nu\,\mathsf{t}^\nu\,, \quad J^\mu \equiv -T^\mu{}_\nu\,\mathsf{m}^\nu \tag{5.18}$$

もゼロでない値を持つ．これらを $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の微小量とすれば，時空も $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の変化を受ける．なお，定常時空に存在した Killing ベクトル場 t^ν と m^ν は摂動後には Killing ベクトルでなくなるが，

$$\nabla_\mu p^\mu = \mathcal{O}(\varepsilon^2)\,, \quad \nabla_\mu J^\mu = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{5.19}$$

となるため，$\mathcal{O}(\varepsilon)$ のオーダーまでの近似では，引き続きこれらを保存量とみなして構わない．

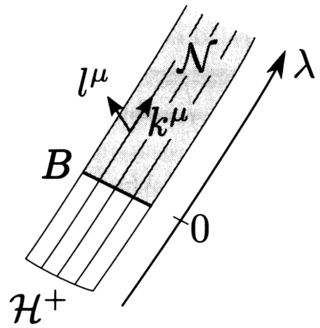


図 5.1　超曲面 $\mathcal{N}$ とヌルベクトル場 k^μ．$\mathcal{H}^+$ 上の曲線は k^μ の積分曲線を表す．

未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ のうち B の未来にある領域を $\mathcal{N}$ と書くと，ホライズンを通って流れ込んだエネルギーや角運動量は

$$\delta M \equiv -\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}S_\mu\, p^\mu\,, \quad \delta J \equiv -\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}S_\mu\, J^\mu \tag{5.20}$$

と書ける．$\mathcal{H}^+$ 上のヌル測地線を $k = k^\mu\,\partial_\mu = \partial_\lambda$（$\lambda$ はアフィンパラメーター）とする．λ は分岐面 B で $\lambda = 0$ となるように選び，分岐面 B 上の座標を y^a $(a = 1, 2)$ とする（図 5.1）．このとき，$\mathcal{N}$ 上で $\mathrm{d}S_\mu = \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}A\,k_\mu$（$\mathrm{d}A \equiv \sqrt{q}\,\mathrm{d}^2y$，$q_{ab}$：$\mathcal{N}$ 上の λ 一定面上の誘導計量）となることを用いると（A.3.2 節参照），δM や δJ は

$$\delta M = -\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^2y\,\sqrt{q}\,k_\mu\, p^\mu\,, \quad \delta J = -\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^2y\,\sqrt{q}\,k_\mu\, J^\mu\,, \tag{5.21}$$

となる．ここで，向き付けは $\epsilon_{\lambda r12} = 1$ とした．また，ここで，右辺の p^μ や J^μ は $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の量なので，体積要素 $\sqrt{q}$ は元の Kerr 解のものを用いてよい．

$\mathcal{N}$ は Killing ベクトル $\xi^\mu = \mathsf{t}^\mu + \Omega_{\mathrm{H}}\,\mathsf{m}^\mu$ の Killing ホライズンであり，(1.213) 式より，$\mathcal{N}$ 上では ξ^μ と k^μ は比例し，$\xi^\mu = \kappa\,\lambda\,k^\mu$ である．これを用いると，δM は次のように書ける：

$$\begin{aligned}\delta M &= \int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^2y\,\sqrt{q}\,k_\mu\,T^\mu{}_\nu\,\mathsf{t}^\nu \\ &= \int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^2y\,\sqrt{q}\,k_\mu\,T^{\mu\nu}\,(\kappa\,\lambda\,k_\nu - \Omega_{\mathrm{H}}\,\mathsf{m}_\nu) \\ &= \frac{\kappa}{8\pi G}\int_{\mathcal{N}} \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}^2y\,\sqrt{q}\,\lambda\,k^\mu\,k^\nu\,R_{\mu\nu} - \Omega_{\mathrm{H}}\,\delta J.\end{aligned} \tag{5.22}$$

ここで，Einstein 方程式と κ が定数であること（第ゼロ法則），そして δJ の定義を用いた．

Raychaudhuri 方程式 (1.140) で $\mathcal{O}(\epsilon)$ のオーダーのみを残すと

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\lambda} = -k^\mu\,k^\nu\,R_{\mu\nu} \tag{5.23}$$

となるため

$$\frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \sqrt{q}\,\lambda\, k^\mu k^\nu R_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \sqrt{q}\,\lambda \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\lambda}$$
$$= -\frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(\sqrt{q}\,\lambda\Theta) - \frac{\mathrm{d}(\sqrt{q}\,\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\Theta\right]$$
$$= -\frac{\kappa}{8\pi G}\left[\sqrt{q}\,\lambda\Theta\right]_0^\infty + \frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \left[\sqrt{q}\,(1+\lambda\Theta)\,\Theta\right] \tag{5.24}$$

を得る．仮定より，最終的に定常状態に達して $\lambda\Theta \to 0$ $(\lambda \to \infty)$ となることを用いると第 1 項は消え，$\mathcal{O}(\epsilon)$ のオーダーで

$$\frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \sqrt{q}\,\lambda\, k^\mu k^\nu R_{\mu\nu}$$
$$= \frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \left[\sqrt{q}\,\Theta\right] = \frac{\kappa}{8\pi G}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \frac{\mathrm{d}\sqrt{q}}{\mathrm{d}\lambda} \tag{5.25}$$

となる．これを (5.22) 式に代入して，次の第一法則が得られる：

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G}\delta A - \Omega_{\mathrm{H}}\,\delta J \quad \left(\delta A \equiv \left[\int \mathrm{d}^2 y \sqrt{q}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\right). \tag{5.26}$$

上の導出法は，摂動前の時空として Kerr ブラックホールに限らず，より一般の時空にも容易に拡張できる．5.3 節では，ここでの議論の順序を反転させることで，第一法則から Einstein 方程式を導出する方法を説明する．

5.1.3 第二法則

第二法則は次の定理として定式化される：

『エネルギー運動量テンソルがヌルエネルギー条件を満たし，かつ，時空が**強く漸近的に予言可能** (strongly asymptotically predictable) であれば，未来イベントホライズンの面積は時間に関して非減少である.』

ここで,「強く漸近的に予言可能」とは $\mathcal{H}^+$ とその外部領域にある 1 つの Cauchy 面上の情報だけから，それより未来の物理現象を予言できるという条件である．これは，数学的に書くと,『時空 $\mathcal{M}$ において，大域的に双曲な部分多様体 U で，ホライズン $\mathcal{H}^+$ とホライズン外部の時空 $\mathcal{J}^-(\mathcal{I}^+)$ (1.7 節参照) を含むものが存在する』という条件である．この条件を満たす場合には，Cauchy 面の族 $\Sigma(\lambda)$ で，$\lambda_2 > \lambda_1$ なら $\Sigma(\lambda_2) \subset D^+\bigl(\Sigma(\lambda_1)\bigr)$ となるものが存在する（Geroch の定理)．$\mathcal{H}_1 \equiv \mathcal{H}^+ \cap \Sigma(\lambda_1)$ と $\mathcal{H}_2 \equiv \mathcal{H}^+ \cap \Sigma(\lambda_2)$ を定義し（図 5.2)，それらの面積を $A(\lambda_1)$ および $A(\lambda_2)$ と記すとき，第二法則の主張は $A(\lambda_2) \geq A(\lambda_1)$ と表される．以下では，パラメーター λ は $\mathcal{H}^+$ 上のヌル測地線のアフィンパラメーターと一致するように選ぶ.

第二法則を示すために，まず次の定理を示す：

『超曲面直交なヌル測地線束（アフィンパラメーター λ）を考える．今，ある点 p において接ベクトル $k = \partial/\partial\lambda$ の膨張率が負 $(\Theta_p < 0)$ であれば，p から未来に向かう測地線上には必ずコースティック（$\Theta = -\infty$

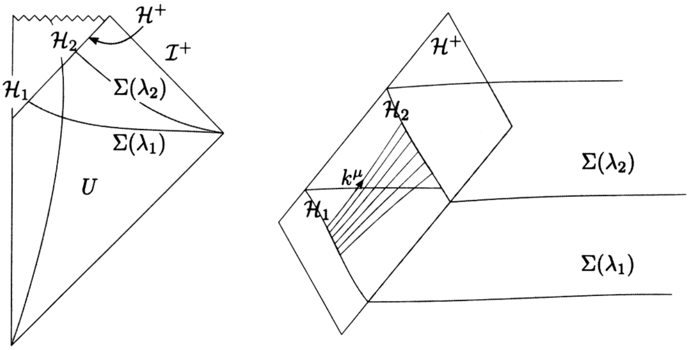


図 5.2　ホライズン $\mathcal{H}^+$ と Cauchy 面 $\Sigma(\lambda)$.

となる点）があり，しかも p からそこへは有限のアフィンパラメーターで到達する．ただし，エネルギー運動量テンソルはヌルエネルギー条件を満たすとする.』

証明：　(1.140) の Raychaudhuri 方程式

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{d-2}\,\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} - k^\mu\,k^\nu\,R_{\mu\nu} \tag{5.27}$$

を用いる（k^μ は超曲面直交なので $\omega_{\mu\nu} = 0$ である）．まず，Einstein 方程式とヌルエネルギー条件から $k^\mu\,k^\nu\,R_{\mu\nu} \geq 0$ であり，$\sigma_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} \geq 0$ も用いると

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{1}{d-2}\,\Theta^2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\Theta^{-1}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \geq \frac{1}{d-2} \tag{5.28}$$

が得られる．これを積分することで

$$\Theta^{-1}(\lambda) \geq \Theta^{-1}(\lambda_0) + \frac{\lambda - \lambda_0}{d-2} \tag{5.29}$$

を得る．今 λ_0 を点 p のアフィンパラメーターの値にとれば，仮定から $\Theta^{-1}(\lambda_0) < 0$ である．$\Theta^{-1}(\lambda)$ は負から始まり，1 次関数以上の速さで増大する関数なので，$\lambda \leq \lambda_0 + (d-2)\,|\Theta^{-1}(\lambda_0)|$ の範囲で必ずゼロ点に到達する．つまり，$(d-2)\,|\Theta^{-1}(\lambda_0)|$ 以下の有限のアフィンパラメーターで $\Theta = -\infty$ となる点に到達する．　□

第二法則の証明：　ホライズン $\mathcal{H}^+$ の接ベクトル k^μ は超曲面直交なので，ヌルエネルギー条件が成り立つ場合には，もし $\mathcal{H}^+$ 上で $\Theta < 0$ となる点が存在したとすると，上の定理から $\mathcal{H}^+$ 上に $\Theta = -\infty$ となるコースティックが現れてしまう．しかし，1.7.3 節で述べた Penrose の定理［イベントホライズンの性質 (2)］から $\mathcal{H}^+$ 上にコースティックは存在できないため，$\Theta < 0$ という仮定は矛盾を起こすことが分かる．従って，$\mathcal{H}^+$ 上では必ず $\Theta \geq 0$ でなければならない．

さて，$\mathcal{H}_1$ 上の任意の点を通るヌル測地線は $\mathcal{H}^+$ から逃れられず，$\Sigma(\lambda_2)$ が Cauchy 面であることから，必ず $\mathcal{H}_2$ とある点で交わる（図 5.2）．$\mathcal{H}^+$ 上のヌ

ル測地線同士が決して交差しないことから，$\mathcal{H}_1$ 上の点と $\mathcal{H}_2$ 上の点の間には 1 対 1 の対応が存在し，$\Theta \geq 0$ より $\mathcal{H}_2$ の面積は $\mathcal{H}_1$ の面積よりも大きいかまたは等しいことが分かる．以上から，第二法則が示された． □

一般化された第二法則

ブラックホールにエントロピー $\Delta S_{\rm mat}(>0)$ を持つ物体を投げ込むと，物体はブラックホールのホライズン内部へ落ち込み，ホライズン外部の物体のエントロピーは減少してしまう．このことは，通常の熱力学第二法則と矛盾しているようにみえる．しかし，この過程でブラックホールは物体のエネルギーを吸収し，Bekenstein–Hawking エントロピー $S_{\rm BH}$ を増大させると考えられる．そこで，一般化されたエントロピー $S_{\rm mat} + S_{\rm BH}$ を考えれば，これに対しては第二法則が成り立つのではないかと期待できる：

$$\delta(S_{\rm mat} + S_{\rm BH}) \geq 0\,. \tag{5.30}$$

この不等式は**一般化された第二法則** (generalized second law) と呼ばれており，Bekenstein により提案された．一般化された第二法則はいくつかの特別な過程を考えると正しいことが示されているが，一般的な証明はまだ確立していない．

5.2 Wald の方法

ここでは，エントロピーを時空の等長変換群に対する Noether チャージとして定義する Wald の方法を紹介する．この方法の利点は，Einstein–Hilbert 作用に高階微分項を加えた高階微分重力 (higher derivative gravity) に対しても種々の公式がそのまま適用できることである．

5.2.1 一般正準変数とプレシンプレクティック形式

Wald の方法を理解するため，Hamilton 解析力学の復習から始めよう．N 個の正準変数のペア (q^a, p_a) $(a = 1, \ldots, N)$ が与えられているとき，1 次型の作用 (first-order action) は

$$S[q(t), p(t)] = \int \mathrm{d}t\, \left[p_a\, \dot{q}^a - H(q,p)\right] \tag{5.31}$$

と書かれ，その運動方程式 $\delta S = 0$ が Hamilton 方程式である．今，正準変数 (q^a, p_a) における座標・共役運動量の区別をなくして一般正準変数 $\phi = (\phi^I)$ $(I = 1, \ldots, 2N)$ を導入し，次の一般の形の作用を考える*2)：

$$S[\phi(t)] = \int \mathrm{d}t\, \left[\Theta_I(\phi)\, \dot{\phi}^I - H(\phi)\right]. \tag{5.32}$$

---

*2) 上の (5.31) の例では $\Theta = p_a\, \mathrm{d}q^a$ つまり $(\Theta_I) = (p_a, 0)$ であり，$\Omega = \mathrm{d}\Theta$ は次になる：$(\Omega_{IJ}) = \begin{pmatrix} 0 & -1_N \\ 1_N & 0 \end{pmatrix}$，$(\Omega_{IJ})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1_N \\ -1_N & 0 \end{pmatrix}$ (1_N：$N \times N$ の単位行列)．

1-形式 $\Theta = \Theta_I(\phi)\,\mathrm{d}\phi^I$ は**プレシンプレクティックポテンシャル** (presymplectic potential) と呼ばれる．運動方程式は，作用の変分 $\delta S[\phi] = \int \mathrm{d}t \left\{ \delta\phi^I \left[\Omega_{IJ}(\phi)\,\dot{\phi}^J - \partial_{\phi^I} H(\phi)\right] + \left(\Theta_I(\phi)\,\delta\phi^I\right)^{\cdot} \right\} = 0$ より，

$$\Omega_{IJ}(\phi)\,\dot{\phi}^J - \partial_{\phi^I} H(\phi) = 0 \tag{5.33}$$

となる．ここで，

$$\Omega \equiv \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2}\,\Omega_{IJ}(\phi)\,\mathrm{d}\phi^I \wedge \mathrm{d}\phi^J \quad \left(\Omega_{IJ} = \partial_{\phi^I}\Theta_J - \partial_{\phi^J}\Theta_I\right) \tag{5.34}$$

は**プレシンプレクティック形式** (presymplectic form) と呼ばれる *3)．

さて，運動方程式は ϕ の時間発展を調べるものであるが，時間発展はハミルトニアン $H(\phi)$ により生成される．一般に，あるパラメーター v により生成される変換を δ_ξ とする（例えば $\delta_\xi \phi^I = \partial_v \phi^I$）．このとき，

$$\Omega_{IJ}(\phi)\,\delta_\xi \phi^J = \partial_{\phi^I} H_\xi(\phi) \tag{5.35}$$

を満たす関数 $H_\xi(\phi)$ をその変換の**生成母関数**と呼ぶ．実際の見つけ方の処方箋自体は単純で，(5.35) 式より $\delta H_\xi(\phi) = \delta\phi^I\,\partial_{\phi^I} H_\xi(\phi) = \delta\phi^I\,\Omega_{IJ}(\phi)\,\delta_\xi\phi^J$ となるので，結局，$H_\xi(\phi)$ の変分

$$\delta H_\xi(\phi) = \Omega_{IJ}(\phi)\,\delta\phi^I\,\delta_\xi\phi^J \tag{5.36}$$

の右辺を先に計算し，それを ϕ について積分すればよい．

以下の議論では変数 ϕ は場を表す：$\phi^I(t) = \phi^i(t, \boldsymbol{x})$．また，$\xi$ はベクトル場 $\xi = \xi^\mu\,\partial_\mu$ に対応し，δ_ξ はその Lie 微分である．H_ξ は $H[\xi]$ と書かれる．

5.2.2 Noether チャージと Komar 積分

計量 $g_{\mu\nu}$ や物質場をまとめて ϕ^i と記すことにし，作用

$$S[\phi^i(x)] = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x\,\mathcal{L}(x, \phi^i, \partial_\mu\phi^i, \partial_\mu\partial_\nu\phi^i, \cdots) \tag{5.37}$$

を考える．ここで，ラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ は $\sqrt{-g}$ を含んだスカラー密度であり，場 ϕ^i の微分は有限階までであるとする．この作用の変分は

---

*3) とくに $2N \times 2N$ 行列 (Ω_{IJ}) が逆行列 $(\Omega_{IJ})^{-1} \equiv (\Omega^{IJ})$ を持つとき，Ω は**シンプレクティック形式** (symplectic form) と呼ばれる．また，$\phi = (\phi^I)$ を座標とする $2N$ 次元多様体 $\mathbf{M}$ とその上の 2-形式 Ω を合わせた $(\mathbf{M}, \Omega)$ を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ．このとき，運動方程式は次の形になる：

$$\dot{\phi}^I = \Omega^{IJ}(\phi)\,\partial_{\phi^J} H(\phi) = \{\phi^I,\, H(\phi)\}.$$

ここで，$\{*, *\}$ は $\{\phi^I, \phi^J\} \equiv \Omega^{IJ}(\phi)$ で定義される Poisson 括弧である．Ω^{IJ} が反対称であることから，この Poisson 括弧は反対称である．また，Ω が閉形式であることから Poisson 括弧が Jacobi 律を満たすことも容易に確認できる．この一般正準座標を用いる形式は，座標変数と正準共役運動量の区別がそもそも難しいもの（例えば Majorana フェルミオンの量子化）などで威力を発揮する．

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x \left(\delta\phi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} + \partial_\mu \delta\phi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} + \cdots\right) \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x \left(\delta\phi^i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} + \partial_\mu \Big[\delta\phi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} + \cdots\Big]\right), \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} + \sum_{n\geq 0} (-1)^n \, \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} \phi^i)}\right] \tag{5.39}$$

となる．ここで δS の被積分関数を $\delta\mathcal{L}$ と記し

$$\partial_\mu \Theta^\mu(\phi, \delta\phi) \equiv \delta\mathcal{L} - \delta\phi^i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} = \partial_\mu \Big[\delta\phi^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} + \cdots\Big] \tag{5.40}$$

を定義すると，作用の変分は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x \, \delta\mathcal{L} = \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x \left[\delta\phi^i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} + \partial_\mu \Theta^\mu(\phi, \delta\phi)\right] \\ &= \int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}^d x \, \delta\phi^i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} + \int_{\partial\mathcal{M}} (\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu \, \Theta^\mu(\phi, \delta\phi) \end{aligned} \tag{5.41}$$

と書ける．$\Theta^\mu(\phi, \delta\phi)$ はプレシンプレクティックポテンシャルであり，運動方程式は $\delta\mathcal{L}/\delta\phi^i = 0$ である．

さて，変分 δ が理論の対称性であるのはラグランジアン密度の変化分が

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu X^\mu \tag{5.42}$$

のように全微分の形に書ける場合で，このとき (5.40) 式より

$$\partial_\mu \big[\Theta^\mu(\phi, \delta\phi) - X^\mu\big] = -\,\delta\phi^i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \tag{5.43}$$

が成り立つ．従って，パラメーター ξ で生成されるある対称性に関する変分 δ_ξ の下での Noether カレントを

$$J^\mu[\xi] \equiv \Theta^\mu(\phi, \delta_\xi\phi) - X^\mu_\xi \qquad \big(\delta_\xi \mathcal{L} \equiv \partial_\mu X^\mu_\xi\big) \tag{5.44}$$

で定義すると，このカレントの発散は

$$\partial_\mu J^\mu[\xi] = -\,\delta_\xi\phi^i \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^i} \approx 0 \tag{5.45}$$

をみたす．ここで，$\approx$ は運動方程式 $\delta\mathcal{L}/\delta\phi^i = 0$ を課したときに得られる等号を意味する．こうして，ϕ^i が運動方程式の解であるときに，$J^\mu[\xi]$ は保存カレントになっていることが分かる（Noether の定理）．また，Poincaré の補題より，$J^\mu[\xi]$ は

$$J^\mu[\xi] \approx \partial_\nu Q^{\mu\nu}[\xi], \qquad Q^{\mu\nu}[\xi] = Q^{[\mu\nu]}[\xi] \tag{5.46}$$

と書ける．

とくに，一般共変な理論の場合には，変分としてベクトル場 ξ に沿った無限小座標変換 $\delta_\xi = \pounds_\xi$ を考えると，$\mathcal{L}$ がスカラー密度であることから

$$\delta_\xi \mathcal{L} = \pounds_\xi \mathcal{L} = \partial_\mu\big(\xi^\mu \mathcal{L}\big) \tag{5.47}$$

となり，$X^\mu = \xi^\mu \mathcal{L}$ を得る．従って，Noether カレント (5.44) は

$$J^\mu[\xi] \equiv \Theta^\mu(\phi, \pounds_\xi \phi) - \xi^\mu \mathcal{L} \tag{5.48}$$

となる．なお，(5.46) 式は $\mathcal{C}^\mu{}_\nu \approx 0$ を満たすあるテンソル $\mathcal{C}^\mu{}_\nu$ を用いて

$$J^\mu[\xi] = \partial_\nu Q^{\mu\nu}[\xi] + \mathcal{C}^\mu{}_\nu \xi^\nu \tag{5.49}$$

の形に書くことができる（証明は [50] の Appendix を参照）．

時空 $\mathcal{M}$ が Cauchy 面 Σ を持つとき，Noether チャージは次式で与えられる：

$$Q[\xi] \equiv \int_\Sigma (\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu \, J^\mu[\xi] \approx \int_\Sigma (\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu \, \partial_\nu Q^{\mu\nu}[\xi] \,. \tag{5.50}$$

とくに，Σ の境界 $\partial\Sigma$ が空間的な閉じた $(d-2)$ 次元曲面のみの場合，Gauss–Stokes の定理 (A.32) を用いて次のようにも書かれる：

$$Q[\xi] \approx \oint_{\partial\Sigma} (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu} \, Q^{\mu\nu}[\xi] \,. \tag{5.51}$$

例：Einstein 重力理論

ここで具体例として，物質場のない Einstein 重力理論の場合に Noether カレントを求めてみよう．Einstein–Hilbert 作用のラグランジアン

$$\mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g}\, R \tag{5.52}$$

の変分をとると (A.26) 式より

$$\delta \mathcal{L}_{\mathrm{EH}} = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} G^{\mu\nu} \, \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \Theta^\mu(g, \delta g) \,, \tag{5.53}$$

$$\Theta^\mu(g, \delta g) = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \big(g^{\mu\nu} \nabla^\rho \delta g_{\nu\rho} - g^{\rho\sigma} \nabla^\mu \delta g_{\rho\sigma} \big) \tag{5.54}$$

となる．従って，Noether カレント (5.48) は

$$J^\mu[\xi] = \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \big(g^{\mu\nu} \nabla^\rho \pounds_\xi g_{\nu\rho} - g^{\rho\sigma} \nabla^\mu \pounds_\xi g_{\rho\sigma} - R\, \xi^\mu \big) \tag{5.55}$$

となる．これを変形すると

$$\begin{aligned} J^\mu[\xi] &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \big[\nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu - 2\, \nabla^\mu \nabla_\nu \xi^\nu - R\, \xi^\mu \big] \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} \big[2\, G^\mu{}_\nu \xi^\nu - \nabla_\nu \nabla^\mu \xi^\nu + \nabla_\nu \nabla^\nu \xi^\mu \big] \\ &= \partial_\nu \Big(-\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} \Big) + \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} G^\mu{}_\nu \xi^\nu \end{aligned} \tag{5.56}$$

と書き換えられ (5.49) と比較すると

$$Q^{\mu\nu}[\xi] = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} \,, \qquad \mathcal{C}^\mu{}_\nu = \frac{\sqrt{-g}}{8\pi G} G^\mu{}_\nu \tag{5.57}$$

となる．この場合，Noether チャージは

$$Q[\xi]=Q^{\text{Komar}}[\xi]\equiv-\frac{1}{8\pi G}\oint_{\partial\Sigma}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\nabla^{[\mu}\xi^{\nu]} \tag{5.58}$$

となり，これは **Komar 積分**と呼ばれる [51]．とくに，ξ が Killing ベクトルの場合には，(A.19) 式より Komar 積分は次のようにも書ける：

$$Q^{\text{Komar}}[\xi]=-\frac{1}{8\pi G}\int_{\Sigma}\mathrm{d}S_{\mu}\,\nabla_{\nu}\nabla^{[\mu}\xi^{\nu]}=-\frac{1}{8\pi G}\int_{\Sigma}\mathrm{d}S_{\mu}\,R^{\mu}{}_{\nu}\,\xi^{\nu}\,. \tag{5.59}$$

5.2.3 生成母関数

次に，ベクトル場 ξ の流れの生成母関数 $H[\xi]$ を構成する．ラグランジアンが与えられると，プレシンプレクティックポテンシャル Θ^{μ} が計算できるが，それを用いて，プレシンプレクティックカレント $\Omega^{\mu}(\phi,\delta_1\phi,\delta_2\phi)$ を

$$\Omega^{\mu}(\phi,\delta_1\phi,\delta_2\phi)\equiv\delta_1[\Theta^{\mu}(\phi,\delta_2\phi)]-\delta_2[\Theta^{\mu}(\phi,\delta_1\phi)] \tag{5.60}$$

で定義する．すると，前小節で説明したように，ベクトル場 ξ の流れを生成する母関数 $H[\xi]$ は，変分

$$\delta H[\xi]\equiv\int_{\Sigma}(\mathrm{d}^{d-1}x)_{\mu}\,\Omega^{\mu}\big(\phi,\delta\phi,\pounds_{\xi}\phi\big) \tag{5.61}$$

を積分したものとして得られる．

$H[\xi]$ を計算するため，まず (5.48) 式より，Noether カレント $J^{\mu}[\xi]$ の変分が

$$\begin{aligned}\delta J^{\mu}[\xi]&=\delta\big[\Theta^{\mu}(\phi,\pounds_{\xi}\phi)\big]-\xi^{\mu}\,\delta\mathcal{L}\\&=\delta\big[\Theta^{\mu}(\phi,\pounds_{\xi}\phi)\big]-\xi^{\mu}\left[\delta\phi^{i}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^{i}}+\partial_{\nu}\Theta^{\nu}(\phi,\delta\phi)\right]\\&\approx\delta\big[\Theta^{\mu}(\phi,\pounds_{\xi}\phi)\big]-\pounds_{\xi}\Theta^{\mu}(\phi,\delta\phi)-\partial_{\nu}\big[2\,\xi^{[\mu}\,\Theta^{\nu]}(\phi,\delta\phi)\big]\\&=\Omega^{\mu}(\phi,\delta\phi,\pounds_{\xi}\phi)-\partial_{\nu}\big[2\,\xi^{[\mu}\,\Theta^{\nu]}(\phi,\delta\phi)\big]\end{aligned} \tag{5.62}$$

と書けることに注意する*4)．従って，運動方程式の解に対して $\delta H[\xi]$ は

$$\delta H[\xi]\approx\int_{\Sigma}(\mathrm{d}^{d-1}x)_{\mu}\,\delta J^{\mu}[\xi]+\oint_{\partial\Sigma}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\,2\,\xi^{[\mu}\,\Theta^{\nu]}(\phi,\delta\phi) \tag{5.63}$$

と書くことができる．ここで，

$$\delta\oint_{\partial\Sigma}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\,\xi^{[\mu}\,B^{\nu]}=\oint_{\partial\Sigma}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\,\xi^{[\mu}\,\Theta^{\nu]}(\phi,\delta\phi) \tag{5.64}$$

となるベクトル場 B^{μ} が見つかったとすれば，

$$\delta H[\xi]\approx\delta\left[\int_{\Sigma}(\mathrm{d}^{d-1}x)_{\mu}\,J^{\mu}[\xi]+\oint_{\partial\Sigma}(\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\,2\,\xi^{[\mu}\,B^{\nu]}\right] \tag{5.65}$$

---

*4) Θ^{μ} は密度ベクトル [$=\sqrt{-g}\times$ (反変ベクトル)] なので，(1.28) と (A.17) より，$\pounds_{\xi}\Theta^{\mu}=\xi^{\nu}\partial_{\nu}\Theta^{\mu}+\partial_{\nu}\xi^{\mu}\,\Theta^{\nu}+\partial_{\nu}\xi^{\nu}\,\Theta^{\mu}$ であることに注意せよ．

となるので，これを積分して，生成母関数 $H[\xi]$ は次のように求まる：

$$
\begin{aligned}
H[\xi] &\approx \int_{\Sigma} (\mathrm{d}^{d-1}x)_{\mu}\, J^{\mu}[\xi] + \oint_{\partial\Sigma} (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\, 2\,\xi^{[\mu}\, B^{\nu]} \\
&\approx \oint_{\partial\Sigma} (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu} \left(Q^{\mu\nu}[\xi] - 2\,B^{[\mu}\,\xi^{\nu]}\right). \qquad (5.66)
\end{aligned}
$$

ここで (5.49) 式を用いた．これから分かるように，運動方程式の解に対して生成母関数 $H[\xi]$ を評価する際には境界項のみが寄与することが分かる．

とくに，ベクトル場 ξ^{μ} として時間発展を生成する Killing ベクトル $\mathsf{t} = \mathsf{t}^{\mu}\,\partial_{\mu}$ や回転を生成する Killing ベクトル場 $\mathsf{m} = \mathsf{m}^{\mu}\,\partial_{\mu}$ を用いると，ハミルトニアン $H[\mathsf{t}]$ や回転の生成子 $-H[\mathsf{m}]$ が得られる．

例：漸近的平坦な 4 次元時空における Einstein 重力理論

漸近的平坦な 4 次元時空の場合には，エネルギー $\mathcal{E}$ と角運動量 $\mathcal{J}$ を，(5.66) で境界 $\partial\Sigma$ を無限遠方における球面 S^2_{∞} としたものとして定義する（d 次元への拡張も容易に行える）．つまり，無限遠方における極座標 (t, r, θ, φ) を導入すると，$\mathsf{t} = \mathsf{t}^{\mu}\,\partial_{\mu} = \partial_t$，$\mathsf{m} = \mathsf{m}^{\mu}\,\partial_{\mu} = \partial_{\varphi}$ について，それらの生成母関数は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} \equiv H[\mathsf{t}] &= \oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\theta\varphi}\left(Q^{\mu\nu}[\mathsf{t}] - 2\,B^{[\mu}\,\mathsf{t}^{\nu]}\right) \\
&= \oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \left(Q^{tr}[\mathsf{t}] + B^{r}\right) \qquad \left[\because\ \mathsf{t}^{\mu} = \delta^{\mu}_{t}\right], \\
\mathcal{J} \equiv -H[\mathsf{m}] &= -\oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\frac{1}{2}\,\epsilon_{\mu\nu\theta\varphi}\left(Q^{\mu\nu}[\mathsf{m}] - 2\,B^{[\mu}\,\mathsf{m}^{\nu]}\right) \\
&= -\oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\, Q^{tr}[\mathsf{m}] = -Q^{\mathrm{Komar}}[\mathsf{m}] \qquad \left[\because\ \mathsf{m}^{\mu} = \delta^{\mu}_{\varphi}\right]. \qquad (5.67)
\end{aligned}
$$

具体的に，Einstein 重力理論の場合に，上で定義したエネルギー $\mathcal{E}$ が ADM エネルギーに一致することを確認しよう．まず，Komar 積分の部分は (5.57) より

$$
\begin{aligned}
\oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\, Q^{tr}[\mathsf{t}] &= -\frac{1}{8\pi G} \oint_{S^{d-2}_{\infty}} \mathrm{d}\Omega^2_2\, r^2\, g^{t\mu}\, g^{r\nu}\,\partial_{[\mu}\mathsf{t}_{\nu]} \quad (\mathsf{t}_{\mu} = g_{\mu t}) \\
&\sim -\frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\Omega^2_2\, r^2 \left(\partial_r g_{tt} - \partial_t g_{rt}\right) \qquad (5.68)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，4.1.4 節の場合と同様，無限遠方で $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(r^{-1})$, $\partial_{\rho}g_{\mu\nu} = \mathcal{O}(r^{-2})$ となることを仮定し，$\mathsf{t}^{\mu} = \delta^{\mu}_{t} + \mathcal{O}(r^{-1})$ として計算したときの主要項のみを残した（単位球面 S^2_{∞} 上の積分要素を $\mathrm{d}\Omega^2_2 \equiv \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ とした）．一方，(5.64) を満たす B^{μ} については，まず右辺が (5.54) より

$$
\begin{aligned}
&\oint_{S^2_{\infty}} (\mathrm{d}^2x)_{\mu\nu}\,\mathsf{t}^{[\mu}\,\Theta^{\nu]}(\phi, \delta\phi) \\
&\sim \frac{1}{16\pi G} \oint_{S^2_{\infty}} \mathrm{d}\Omega^2_2\, r^2\, g^{r\mu}\, g^{\rho\sigma}\left(\nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\rho} - \nabla_{\mu}\delta g_{\rho\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sim \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\Omega_2^2\, r^2\, g^{rr}\, g^{\rho\sigma}\left(\partial_\sigma \delta g_{r\rho} - \partial_r \delta g_{\rho\sigma}\right) \\
&\sim \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\Omega_2^2\, r^2 \left[-\partial_t \delta g_{rt} + \partial_r \delta g_{tt} + \delta^{ij}\left(\partial_i \delta g_{rj} - \partial_r \delta g_{ij}\right)\right] \\
&\sim \frac{1}{16\pi G}\,\delta \oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\Omega_2^2\, r^2 \left[\partial_r g_{tt} - \partial_t g_{rt} + \delta^{ij}\left(\partial_i g_{rj} - \partial_r g_{ij}\right)\right] \qquad (5.69)
\end{aligned}
$$

となることに注意する．ここで，添え字 i は，無限遠方における直交座標系 $(t,\, x^i)$ $(r^2 = |x|^2)$ に関するものである．従って

$$
\begin{aligned}
&\oint_{S^2_\infty} (\mathrm{d}^2 x)_{\mu\nu}\, \mathsf{t}^{[\mu}\, B^{\nu]} = \oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, B^r \\
&\sim \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\Omega_2^2\, r^2 \left[\partial_r g_{tt} - \partial_t g_{rt} + \delta^{ij}\, \mathsf{r}^k \left(\partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\right)\right] \qquad (5.70)
\end{aligned}
$$

となり $(\mathsf{r}^i\, \partial_i \equiv \partial_r)$，Komar 積分からの寄与 (5.68) を加えることで，エネルギーは

$$
\mathcal{E} = \frac{1}{16\pi G}\oint_{S^2_\infty} \mathrm{d}\Omega_2^2\, r^2\, \delta^{ij}\, \mathsf{r}^k \left(\partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}\right) \qquad (5.71)
$$

と求まる．これは，確かに ADM エネルギーに一致する．

5.2.4 Wald エントロピーと第一法則の導出

これまでに定義したチャージを用いてブラックホールの第一法則を導く．ここでは，時空 $\mathcal{M}$ として，漸近的平坦な定常ブラックホール時空を考える．また，Cauchy 面 Σ については，Σ の境界が無限遠方の $(d-2)$ 次元球面 S^{d-2}_∞ と分岐面 B のみとなるものを考える．

ホライズン上ではヌルになり，分岐面 B 上で 0 となる Killing ベクトルを $\xi^\mu = \mathsf{t}^\mu + \Omega_{\mathrm{H}}\, \mathsf{m}^\mu$ とし，さらに，表面重力が 1 になるように規格化したものを $\bar{\xi}^\mu \equiv \xi^\mu/\kappa$ とおく．κ は定数なので $\bar{\xi}^\mu$ も Killing ベクトルであり $(\pounds_{\bar{\xi}}\phi = 0)$，$\Omega^\mu(\phi, \delta\phi, \pounds_{\bar{\xi}}\phi) = 0$ が成り立つ．従って，(5.61) と (5.65) より

$$
0 = \delta H[\bar{\xi}] \approx \delta \oint_{\partial\Sigma} (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu} \left(Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] + 2\,\bar{\xi}^{[\mu}\, B^{\nu]}\right) \qquad (5.72)
$$

が得られる．すると，いま $\oint_{\partial\Sigma} = \oint_{S^{d-2}_\infty} - \oint_B$ の場合を考えているので

$$
\begin{aligned}
&\delta \oint_B (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu} \left(Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] + 2\,\bar{\xi}^{[\mu}\, B^{\nu]}\right) \\
&= \delta \oint_{S^{d-2}_\infty} (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu} \left(Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] + 2\,\bar{\xi}^{[\mu}\, B^{\nu]}\right) \\
&= \frac{1}{\kappa}\left(\delta\mathcal{E} - \Omega_{\mathrm{H}}\, \delta\mathcal{J}\right) \qquad (5.73)
\end{aligned}
$$

となることが分かる．最後の等式で，$Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}]$ の引数 $\bar{\xi}$ に関する線形性を用いた．

以上より，時空のエントロピー S を

$$S \equiv 2\pi \oint_B (\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\, Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] \tag{5.74}$$

で定義すると，B 上で $\bar{\xi}=0$ であることより，(5.73) 式はブラックホール熱力学の第一法則の形になる：

$$\frac{\kappa}{2\pi}\,\delta S = \delta\mathcal{E} - \Omega_{\mathrm{H}}\,\delta\mathcal{J}\,. \tag{5.75}$$

とくに Einstein 重力理論の場合には，(5.57) より

$$Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\,\nabla^{[\mu}\bar{\xi}^{\nu]} \tag{5.76}$$

であった．ここで，$\bar{\xi}^\mu$ は Killing ホライズン上のヌルの法ベクトルであるため，

$$\nabla^\mu\bar{\xi}^\nu = 2\,\bar{\xi}^{[\mu}\,l^{\nu]} + 2\,\bar{w}^{[\mu}\,\bar{\xi}^{\nu]} \quad \left(\bar{w}^\mu\,l_\mu = 0 = \bar{w}^\mu\,\bar{\xi}_\mu\right) \tag{5.77}$$

を満たす*5)．また，l^μ は $l^\mu\,\bar{\xi}_\mu = -1$ を満たすヌルベクトルである．従って，双法面テンソル (binormal) $\varepsilon^{\mu\nu} \equiv 2\,\bar{\xi}^{[\mu}\,l^{\nu]}$ を定義すると

$$Q^{\mu\nu}[\bar{\xi}] = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\,\nabla^{[\mu}\bar{\xi}^{\nu]} = -\frac{\sqrt{-g}}{8\pi G}\left(\varepsilon^{\mu\nu} + 2\,\bar{w}^{[\mu}\,\bar{\xi}^{\nu]}\right) \tag{5.78}$$

と書け，分岐面上の積分測度が $\sqrt{-g}\,(\mathrm{d}^{d-1}x)_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{d}A$ と書けることと，$\varepsilon^{\mu\nu}\,\varepsilon_{\mu\nu} = -2$，そして，$B$ 上で $\bar{\xi}=0$ となることを用いることで

$$S = -\frac{1}{4G}\oint_B \sqrt{-g}\,(\mathrm{d}^{d-2}x)_{\mu\nu}\,\varepsilon^{\mu\nu} = \frac{A}{4G} \quad (A\text{ :分岐面の面積}) \tag{5.79}$$

が得られる．従って，(5.74) は Bekenstein–Hawking エントロピーと一致している．

5.2.5 高階微分重力理論

一般共変な理論のラグランジアンは常に

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\big(g_{\mu\nu};\, R_{\mu\nu},\, \nabla_\epsilon R_{\mu\nu\rho\sigma},\, \cdots;\psi,\, \nabla_\mu\psi,\, \cdots\big) \tag{5.80}$$

という形に書ける．ここで，ψ は重力場以外の任意の場である．実は，この場合には Wald エントロピーは次のように書くことができる [52], [53]：

$$S = -2\pi \oint_B \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{q}\,\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\rho\sigma}}\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon_{\rho\sigma}\,. \tag{5.81}$$

---

*5) 一般に，Killing ホライズンのヌル法ベクトル場 ξ^μ は，Killing ベクトルであることから $\nabla_\mu\xi_\nu = \nabla_{[\mu}\xi_{\nu]}$ を満たし，Frobenius の定理から，Killing ホライズン $\mathcal{H}^+$ のある接ベクトル場 w^μ を用いて $\nabla_{[\mu}\xi_{\nu]} = 2\,w_{[\mu}\,\xi_{\nu]}$ と書ける．従って，共変微分は $\nabla_\mu\xi_\nu = 2\,w_{[\mu}\,\xi_{\nu]}$ と書ける．ここで，ヌルベクトル場 l^μ を用いて w^μ を分解すると

$$\nabla_\mu\xi_\nu = 2\,\kappa\,\xi_{[\mu}\,l_{\nu]} + 2\,\bar{w}_{[\mu}\,\xi_{\nu]} \quad \left(\bar{w}^\mu\,l_\mu = 0 = \bar{w}^\mu\,\xi_\mu\right)$$

と書くことができる（$\xi_{[\mu}\,l_{\nu]}$ の係数は，両辺を ξ^μ と縮約させることで求めた）．ここで扱っている Killing ベクトル $\bar{\xi}^\mu$ は $\kappa = 1$ と規格化されているため，(5.77) となる．

とくに，Einstein 重力理論の場合には

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R_{\mu\nu\rho\sigma}} = \frac{1}{16\pi G}\,\frac{1}{2}\left(g^{\mu\rho}\,g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\,g^{\nu\rho}\right) \tag{5.82}$$

より

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{8\,G}\oint_B \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{q}\,\frac{1}{2}\left(g^{\mu\rho}\,g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\,g^{\nu\rho}\right)\varepsilon_{\mu\nu}\,\varepsilon_{\rho\sigma} \\ &= \frac{1}{4\,G}\oint_B \mathrm{d}^{d-2}x\,\sqrt{q} = \frac{A}{4\,G} \end{aligned} \tag{5.83}$$

となり，確かに (5.79) を再現している．

5.3 熱力学から重力理論を導く試み

本節では,「熱力学から一般相対性理論を導く」という試みについて解説する．

Rindler 時空の Killing ホライズン

Rindler 時空 [(1.233) 参照] の Killing ホライズンをもう少し調べてみよう．まず，光円錐座標 (U, V) を $U \equiv t-z = -z_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{-\kappa\,t_{\mathrm{R}}}$, $V \equiv t+z = z_{\mathrm{R}}\,\mathrm{e}^{\kappa\,t_{\mathrm{R}}}$ として導入する．ヌル測地線 $U = 0$ の接ベクトル $k = \partial_V$ は $k^\nu\,\nabla_\nu k^\mu = 0$ を満たし，V はアフィンパラメーターである．一方，Killing ベクトル場 $\xi_{\mathrm{R}} = \kappa\,(V\,\partial_V - U\,\partial_U)$ も $U = 0$ に接しており，これは $U = 0$ 上で $\xi_{\mathrm{R}}^2 = 0$ となるため $U = 0$ は Killing ホライズンである．また，このホライズン上では $\xi_{\mathrm{R}}^\mu = \kappa\,V\,k^\mu$ の関係がある．

局所 Rindler ホライズン

熱的性質に関する 3.2.1 節の議論を局所慣性系に対して適用するため，Jacobson に従って局所 Rindler ホライズンという概念を導入する[54],[55]．

時空の各点 p と，そこでのヌルベクトル（光線）k^μ が与えられたとき，p を含む微小な空間的 2 次元面 B を，その面から垂直に出る光線束が膨張率 Θ とせん断速度テンソル $\sigma_{\mu\nu}$ を持たないように選ぶ：$\Theta|_p = \sigma_{\mu\nu}|_p = 0$（図 5.3（左））．このとき，$B$ から出る光線束を B から過去に遡ってできる 3 次元領域（面積を表す空間 2 次元とヌル測地線のアフィンパラメーター λ の 1 次元）を**局所 Rindler ホライズン** (LRH: Local Rindler Horizon) と呼ぶ．LRH は点 p と光線 k と微小面 B に依存する，局所的に定義された概念であることに注意せよ．以下ではアフィンパラメーター λ を $\lambda|_p = 0$ と選び，LRH では $\lambda < 0$ であるとする（図 5.3（右））．

こうして点 p において LRH を構成しておけば，p の周辺で近似的なブースト Killing ベクトル場 ξ を LRH がその Killing ホライズンとなるように指定することができ，B を近似的な分岐面として 3.2.1 節の議論を適用することができる．また，ξ は，LRH のアフィンパラメーター λ を用いた接ベクトル $k = \partial_\lambda$ と $\xi^\mu \simeq \kappa\,\lambda\,k^\mu$ と対応する．

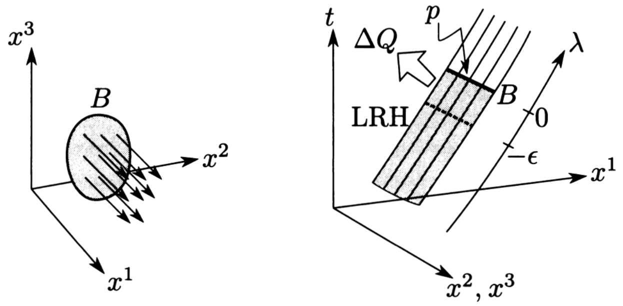


図 5.3　（左）3 次元空間内の微小面 B と光線束．B は光線束の膨張率と歪み率が 0 になるようにとる．ここでは k^μ を x^1 方向にとった.（右）4 次元空間内の LRH（1 次元落として描いてある）.

Einstein 方程式の導出

Jacobson は次の仮定を置くことで，熱力学の第一法則から Einstein 方程式が導かれることを示した[54]：

- （仮定 1）LRH は $T_0 = \hbar\kappa/2\pi$ の熱浴とみなせ，ブーストに対応するエネルギーフラックスはホライズンを横切る際にその温度で熱化される.
- （仮定 2）エントロピー S はホライズンの面積 A に等分配される：$S = \alpha A$（α は正の定数）.

まず，エネルギーフラックス p^μ は，物質場のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を用いて，$p^\mu = -T^{\mu\nu}\xi_\nu$ と表される（ξ が Killing ベクトル場のときには，$T^{\mu\nu}$ の保存則 $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ と Killing 方程式 $\nabla_\mu\xi_\nu + \nabla_\nu\xi_\mu = 0$ より $\nabla_\mu p^\mu = 0$ が示せる）．したがって，LRH 上の p 近傍の領域 $(-\epsilon, 0)\times B$ を横切るエネルギーフラックスは次で与えられる：

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \int_{(-\epsilon,0)\times B} \mathrm{d}S_\mu\, p^\mu = \int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}A\, k_\mu\, p^\mu \\ &= -\int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}A\, T_{\mu\nu}\,\xi^\nu\, k^\mu \\ &= -\kappa \int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}A \left[\lambda\, T_{\mu\nu}\, k^\mu\, k^\nu + \mathcal{O}(\lambda^2)\right]. \end{aligned} \tag{5.84}$$

ここで，領域 $(-\epsilon, 0)\times B$ の微小体積要素 $\mathrm{d}S_\mu$ が $\mathrm{d}S_\mu = \mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}A\,k_\mu$ と表せることを用いた（A.3.2 節参照）.

一方，エントロピーの変化は,（仮定 2）より，面積変化から計算できる．まず，λ を変化させたときの膨張率 $\Theta \equiv (\mathrm{d}A)^{-1}\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)\,(\mathrm{d}A)$ の変化が (1.140) の Raychaudhuri 方程式（k^μ は超曲面直交なので $\omega_{\mu\nu} = 0$ である）

$$k^\rho\,\partial_\rho\Theta = -k^\mu\,k^\nu\,R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\Theta^2 - \sigma_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu} \tag{5.85}$$

で記述されることを思い出そう．$\lambda = 0$ において $\Theta = 0 = \sigma_{\mu\nu}$ なので，Raychaudhuri 方程式を積分すれば，考えている微小領域 $(-\epsilon, 0)\times B$ で，

$$\Theta = -\lambda\, R_{\mu\nu}\, k^\mu\, k^\nu + \mathcal{O}(\lambda^2) \tag{5.86}$$

となることが分かる．すると（仮定 2）より，$\lambda = -\epsilon$ から $\lambda = 0$ までのエントロピー S の変化が，その間の面積の変化を用いて，次のように与えられる：

$$\begin{aligned}\Delta S = \alpha\, \Delta A &= \alpha \int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}A\, \Theta \\ &= -\alpha \int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{d}\lambda \int_B \mathrm{d}A \left[\lambda\, R_{\mu\nu}\, k^\mu\, k^\nu + \mathcal{O}(\lambda^2)\right].\end{aligned} \tag{5.87}$$

すべてが準静的に行われたとすると，熱力学の第一法則と（仮定 1）より，次の式が成立する：

$$\Delta Q = T_0\, \Delta S \quad (T_0 = \hbar\, \kappa/2\pi). \tag{5.88}$$

κ が定数であることと，(5.84) と (5.87) を用いると，

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{\hbar\,\alpha}{2\pi}\, R_{\mu\nu}\right) k^\mu\, k^\nu = 0 \tag{5.89}$$

が，p におけるすべてのヌルベクトル k^μ に対して成り立たなければならないことが分かる．これより，

$$R_{\mu\nu} - \frac{2\pi}{\hbar\,\alpha}\, T_{\mu\nu} = \Phi\, g_{\mu\nu} \tag{5.90}$$

を得る．Φ は $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ を課すことで決まり，実際，Bianchi 恒等式 $\nabla^\mu\left[R_{\mu\nu} - (R/2)\, g_{\mu\nu}\right] = 0$ より，$\Phi = R/2 - \Lambda$ (Λ：定数) を得る．定数 α を $\alpha = 1/(4G\hbar)$ と置けば*6)，結局 $g_{\mu\nu}$ が

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, R\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu} \tag{5.91}$$

という方程式を満たさなければならないことが分かる．これは，Newton 定数 G，宇宙定数 Λ の Einstein 方程式そのものである．

上の 2 つの仮定は，ホログラフィー原理から要請される重力の熱力学的性質とみなすことができる．これから Einstein 方程式が導かれるということから Jacobson は，Einstein 方程式を基礎方程式とみなすのではなく，ある種の熱力学的な状態方程式とみなすべきではないかと提案した[54]*7)．

*6) この比例定数は，Bekenstein–Hawking エントロピーのものと同じである．

*7) 重力をエントロピー力として解釈しようという試みもある[56]．解説は [57] を見よ．

第 6 章
超弦理論とブラックホールエントロピー

エントロピーは統計力学的には状態数の対数として与えられる．ブラックホールのエントロピーを正しく与えられるかどうかは，量子重力理論として正しい理論であるかどうかの重要な判定条件である．超弦理論は現時点における量子重力理論の唯一の候補であるが，本章では，超弦理論が，計算可能なあるクラスのブラックホールに対して，正しく Bekenstein–Hawking のエントロピーを与えることを解説する．

6.1 弦とブレーン（復習）

本節では超弦理論の必要事項について簡単に解説する．ボソン弦については，具体的イメージがわくよう比較的丁寧に解説するが，超対称性がある場合については，テクニカルに込み入った話が必要となるため，結果だけをまとめる．詳しい解説は，超弦理論に関する標準的な教科書 [58]～[61] などを読まれたい．

6.1.1 点粒子から弦へ

場の量子論がくりこみ可能であるとは，粒子を数学的な点とみなすことができるということである．もう少し正確に述べると，場の量子論とは空間の各点に力学的自由度が存在する量子力学系を扱うものであるが，一般に，任意に小さなスケールまで量子揺らぎを足しあげると物理量は発散してしまう（紫外発散）．そのため，計算を行うには，まず時空を格子間隔 a の格子に分割するなどして紫外側を正則化しておき，『$a \to 0$ の連続極限で長距離の観測量が有限にとどまる』ように理論の有限個のパラメーター（裸の結合定数）を微調整する．実はこれはいつも可能なわけではなく，この微調整が可能な理論を**くりこみ可能**と呼ぶ．

一般に，くりこみ可能でない理論 A に対し，理論 A を低エネルギー有効理論として持つくりこみ可能な理論 B があるとき，理論 B は理論 A の**紫外完全**

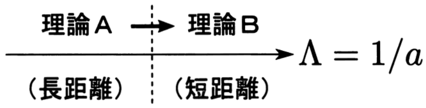


図 6.1　紫外完全化.

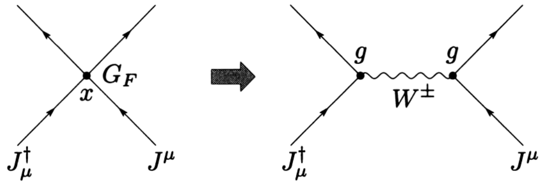


図 6.2　4 体 Fermi 理論と Weinberg–Salam 理論．カレント－カレント接触相互作用を W ボソンの交換に置き換えている．

化 (UV completion) という（図 6.1）．理論 A からその紫外完全化の理論 B を構成する一般的な処方箋は,『理論 A の相互作用領域をぼやけさせて，短距離での振る舞いを改善する』ことである．典型的な具体例は，弱い相互作用における 4 体 Fermi 理論（くりこみ不可能）に対する Weinberg–Salam 理論（くりこみ可能）である（図 6.2）．そこでは，4 体 Fermi 相互作用というカレントとカレントの接触相互作用を W ボソンや Z ボソンの交換に置き換えることにより，相互作用領域をぼかしている．

一方，3 次元以上の時空では重力相互作用はくりこみ可能でない．実際，重力の結合定数である Newton 定数が空間的な次元量になっていることから，摂動的にくりこめないことがすぐ分かる．さらに，ランダム単体分割などを用いた格子重力理論の数値計算から，宇宙定数と Newton 定数からなるパラメーター空間には非自明な 2 次相転移点が見つかっておらず，今では，重力を局所場の枠内で紫外完全化することは不可能であると考えられている．

そこで，重力相互作用を重力子という点粒子の交換でなく，空間的に拡がったものの交換として表そうとしたのが弦理論である（図 6.3）．弦は 1 次元的に拡がったものであるため，点粒子に比べ紫外発散の問題は著しく改善する（実際，摂動的に有限である）．

相互作用領域をぼかすことだけが目的であれば，空間 1 次元的に拡がった弦ではなく，空間的にさらに拡がったもの，たとえば空間 2 次元方向に拡がった膜の交換にすれば紫外発散の性質はよりよくなるのではないか，と期待できる．空間 p 次元に拡がったものを p ブレーンと呼ぶことにすれば，実際，p が大きいほど相互作用領域はよりぼやけるが，今度は世界体積の内部自由度が大きくなり，新たな発散の困難が生じてしまう．結局のところ，$p = 1$（弦）を用いるのが最もコントロールしやすい理論を与えることになる．さらにボーナスとして，弦理論は空間・時間・物質すべてに対する究極の統一理論 (Theory of Everything) になっているのではないかと期待されている．

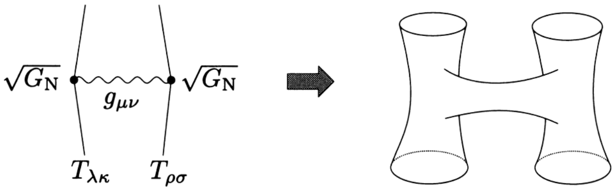


図 6.3　重力子の交換から弦の交換へ.



図 6.4　開弦 (open string) と閉弦 (closed string). 弦の太さは 0 である.

6.1.2　開弦と閉弦

弦には**開弦** (open string) と**閉弦** (closed string) の 2 種類がある. どちらも振動し, 弦の張力エネルギーに比べて十分低エネルギーのとき（つまり, 弦の振動幅よりも十分長距離で見ているとき）, 弦はあたかも点粒子のように観測される. そのとき, 弦の振動モードは点粒子が持つ量子数（質量・スピンなど）として観測される（図 6.4）.

6.1.3　南部・後藤作用と Polyakov 作用

弦の運動を決定する作用を書き下す前に, まず, 点粒子の場合について復習しておこう.

[1 個の点粒子の量子論（復習）]

d 次元 Minkowski 時空内で点 x から点 y へ運動する点粒子の軌跡を考える. τ $(0 \le \tau \le 1)$ を任意の 1 次元パラメーターとすれば, 軌跡は d 個の関数 $X^\mu(\tau)$ $(\mu = 0, 1, \ldots, d-1)$ で指定できる. ただし, $X^\mu(0) = x^\mu$, $X^\mu(1) = y^\mu$ である. 1.1.8 節で説明したように, 点粒子の古典的軌道を与えるには, 作用として世界線の長さを選べばよい*1)：

$$I_0[X^\mu(\tau)] = -m_0 \int_0^1 \mathrm{d}\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu}\,\dot{X}^\mu(\tau)\,\dot{X}^\nu(\tau)}\,. \tag{6.1}$$

比例係数 m_0 は粒子の質量に対応するパラメーターである.

ここで, 今気にしているのは粒子の軌跡であって, $X^\mu(\tau)$ の関数形そのものではないことに注意しよう. 実際, 1.1.8 節で述べたように, 区間 $[0,1]$ を同じ区間に移す 1 次元微分同相変換 $f : \tau \mapsto f(\tau)$ (s.t. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\dot{f}(\tau) > 0$) を用いて,

*1)　経路積分に意味を持たせるには適当に虚部を持たせる必要がある. 詳しい議論は [25] を参照のこと.

$$X^\mu(\tau) \to \tilde{X}^\mu(\tau) = X^\mu\bigl(f(\tau)\bigr) \tag{6.2}$$

のように $X^\mu(\tau)$ を新しい軌跡 $\tilde{X}^\mu(\tau)$ へと変換しても作用は不変である：

$$I_0[\tilde{X}^\mu(\tau)] = I_0[X^\mu(\tau)]\,. \tag{6.3}$$

このことを,「作用 I_0 は Diff_1 のゲージ対称性を持つ」という.

さて，作用 I_0 から導かれる運動方程式は，1.1.8 節で説明したように，

$$\ddot{X}^\mu = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\sqrt{-\dot{X}^2}}{\sqrt{-\dot{X}^2}}\,\dot{X}^\mu \tag{6.4}$$

となる．とくに今，ゲージ変換を用いて，τ を $\dot{X}^2 = -1$ を満たすようにとれば (つまり τ を固有時にとれば)，運動方程式は $\ddot{X}^\mu = 0$ となり，古典的な軌道が

$$X^\mu_{古典}(\tau) = x^\mu + (y^\mu - x^\mu)\,\tau \tag{6.5}$$

という等速直線運動になることが分かる.

作用 I_0 は極めて非線形な形をしているが，補助変数 $e(\tau)$ を用いることで 2 次形式にできる：

$$I[X^\mu(\tau), e(\tau)] \equiv \int_0^1 \mathrm{d}\tau \left(\frac{\dot{X}^2}{2\,e} - \frac{m_0^2}{2}e\right). \tag{6.6}$$

実際，ダイナミカルでない変数 e について $I[X^\mu, e]$ の古典解を先に求めれば，$e_{古典} = -m_0^{-1}\sqrt{-\dot{X}^2}$ となり，これを $I[X^\mu, e]$ に代入すれば，正しく $I_0[X^\mu]$ が得られる：$I[X^\mu, e_{古典}] = I_0[X^\mu]$．この作用 $I[X^\mu(\tau), e(\tau)]$ は 1 次元微分同相変換群 $\mathrm{Diff}_1 = \{f : \tau \mapsto f(\tau)\}$ のゲージ変換

$$X^\mu(\tau) \to \tilde{X}^\mu(\tau) = X^\mu\bigl(f(\tau)\bigr)\,, \tag{6.7}$$

$$e(\tau) \to \tilde{e}(\tau) = \frac{\mathrm{d}f(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\,e\bigl(f(\tau)\bigr) \tag{6.8}$$

のもとで不変である：

$$I[\tilde{X}^\mu(\tau), \tilde{e}(\tau)] = I[X^\mu(\tau), e(\tau)]\,. \tag{6.9}$$

なお，$h_{\tau\tau} \equiv -e^2$ とおけば，(6.6) は

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}\tau\,\sqrt{-h_{\tau\tau}}\left[-\frac{1}{2}\,h^{\tau\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}X^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}X^\nu}{\mathrm{d}\tau} - \frac{1}{2}\,m_0^2\right] \tag{6.10}$$

と書き直され，$h_{\tau\tau}(\tau)$ が 1 次元パラメーター空間 $M_1 = \{\tau\,|\,0 \le \tau \le 1\}$ 上の計量とみなせることが分かる：$\mathrm{d}s_1^2 = h_{\tau\tau}(\tau)\,\mathrm{d}\tau^2 = -e^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau^2$．上の $e(\tau)$ に対するゲージ変換はこの解釈と整合している.

作用を (6.6) の形にしてしまうと経路積分は簡単に実行できる．とくに，$e(\tau)$ の関数としての自由度 (1 自由度) は Diff_1 の自由度と釣り合うため，$e(\tau) =$ 定数

とゲージ固定することで，$e(\tau)$ 積分をほとんど消去することができる*2)．結果として，境界条件：$X^\mu(0)=x^\mu$, $X^\mu(1)=y^\mu$ のもとで，経路積分は*3)

$$\begin{aligned}G(y,x) &\equiv \sum_{x\text{ と }y\text{ を結ぶ経路}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m_0\times(\text{経路の長さ})} \\ &= \int \frac{[\mathrm{d}X^\mu(\tau)\,\mathrm{d}e(\tau)]}{\mathrm{Vol(Diff_1)}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}I[X^\mu(\tau),e(\tau)]} \\ &\sim \int_0^\infty \mathrm{d}T \int [\mathrm{d}X^\mu]\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}I[X^\mu(\tau),T]} \end{aligned} \tag{6.11}$$

となり，簡単な計算により，$G(y,x)$ は自由スカラー場のプロパゲーターに帰着することが確かめられる*4)：

$$G(y,x)=\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}p(y-x)}\ \frac{\mathrm{i}}{-p^2-m^2+\mathrm{i}0}\,. \tag{6.12}$$

[1 本の弦の量子論]

点粒子の軌跡は 1 次元の世界線で表されたが，弦の軌跡は 2 次元の**世界面** (world sheet) となる．これを記述するために，まず時間的パラメーター τ における弦の形状を

$$\text{開弦：}\quad X^\mu(\tau,\sigma)\quad (0\le\sigma\le\pi)\,, \tag{6.13}$$

$$\text{閉弦：}\quad X^\mu(\tau,\sigma)\quad \big(0\le\sigma\le 2\pi;\ \ X^\mu(\tau,\sigma+2\pi)=X^\mu(\tau,\sigma)\big) \tag{6.14}$$

とパラメトライズしておく（図 6.5）．すると，$\xi=(\xi^\alpha)=(\xi^0=\tau,\,\xi^1=\sigma)$ として，$X^\mu(\xi)=X^\mu(\tau,\sigma)$ が表す世界面上の 2 次元誘導計量は，$\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}X^\mu(\xi)\,\mathrm{d}X^\nu(\xi)\equiv\gamma_{\alpha\beta}(\xi)\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta$ より，

$$\gamma_{\alpha\beta}(\xi)=\eta_{\mu\nu}\,\partial_\alpha X^\mu(\xi)\,\partial_\beta X^\nu(\xi) \tag{6.15}$$

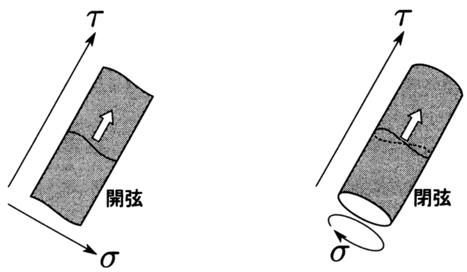


図 6.5 開弦と閉弦が掃く世界面．弦の太さは 0 である．

*2) 実際には，モジュライ $T\equiv\int_0^1\mathrm{d}\tau\,e(\tau)$ の寄与（だけ）が経路積分に残る．また，m_0 は量子補正を受ける：$m=m_0+(\text{量子補正})$．詳しい計算については [62] を参照のこと．

*3) Diff_1 で移りあうものは同一視して経路積分を行うために，ゲージ変換群の体積 $\mathrm{Vol(Diff_1)}$ で割っている．

*4) 一般の時空において，虚部を慎重に入れた解析については [25] を見よ．

となる．なお，弦の軌跡である世界面に対し，世界面が埋め込まれている時空を**標的空間** (target space) と呼ぶ．

点粒子の作用 (6.1) を参考にして，弦に関する作用を世界面の面積にとる：

$$I_{\rm NG}[X^\mu(\xi)] \equiv -T_s \int \mathrm{d}^2\xi\,\sqrt{-\gamma} \quad \left[\gamma \equiv \det(\gamma_{\alpha\beta})\right]. \tag{6.16}$$

この作用を**南部・後藤作用**という．比例係数 T_s は弦の張力エネルギーであるが，多くの場合，T_s よりも

$$T_s = \frac{1}{2\pi\alpha'} = \frac{1}{2\pi\ell_s^2} \quad \left(\alpha' = \ell_s^2\right) \tag{6.17}$$

で定義される α' や ℓ_s を使うほうが便利である．$\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ は弦の広がりの典型的な長さスケールを表す量であり，**ストリング長さ**と呼ばれる．

上の南部・後藤作用は極めて非線形な形をしているが，点粒子のときと同様に，2 次元世界面上の補助的計量

$$\mathrm{d}s_2^2 = h_{\alpha\beta}(\xi)\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta \tag{6.18}$$

を導入することで，2 次形式にできる：

$$I_{\rm P}[X^\mu(\xi), h_{\alpha\beta}(\xi)] \equiv -\frac{T_s}{2} \int \mathrm{d}^2\xi\,\sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu}\,\partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X^\nu\,. \tag{6.19}$$

実際，$h_{\alpha\beta}$ に関する運動方程式を解くと

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(h^{\gamma\delta}\,\gamma_{\gamma\delta})\,h_{\alpha\beta}\,, \tag{6.20}$$

つまり $h_{\alpha\beta}^{古典} = (関数) \times \gamma_{\alpha\beta}$ となり，これを $I_{\rm P}$ に代入すると南部・後藤作用が得られる：

$$I_{\rm P}[X^\mu, h_{\alpha\beta}^{古典}] = I_{\rm NG}[X^\mu]\,. \tag{6.21}$$

この $I_{\rm P}$ のことを **Polyakov 作用**と呼ぶ*5)．

Polyakov 作用には $\mathrm{Diff}_2 \times \mathrm{Weyl}$ のゲージ対称性がある：

$$\mathrm{Diff}_2: \quad \tilde{X}^\mu(\xi) = X^\mu\big(f(\xi)\big)\,, \tag{6.22}$$

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(\xi) = \partial_\alpha f^\gamma(\xi)\,\partial_\beta f^\delta(\xi)\,h_{\gamma\delta}\big(f(\xi)\big)\,, \tag{6.23}$$

$$\mathrm{Weyl}: \quad \tilde{X}^\mu(\xi) = X^\mu(\xi)\,, \tag{6.24}$$

$$\tilde{h}_{\alpha\beta}(\xi) = \mathrm{e}^{2\omega(\xi)}\,h_{\alpha\beta}(\xi)\,. \tag{6.25}$$

当然存在すべき 2 次元微分同相変換 (Diff_2) の対称性に加え，Weyl 変換の対称性が現れることが 2 次元の特殊性である．パラメーター空間上の計量である

*5) この作用は Brink と Di Vecchia と Howe [63]，そして，Deser と Zumino [64] らによって初めて導入され，Polyakov が，その経路積分量子化を詳細に調べた．点粒子に対する 2 つの作用（I_0 と I）の等価性は量子論レベルで成立するが，弦に対する 2 つの作用（$I_{\rm NG}$ と $I_{\rm P}$）の量子論的等価性は厳密には示されていない．

$h_{\alpha\beta}(\xi)$ は 2×2 の対称テンソルであるから 3 自由度を持つが，一方で，ゲージ変換も 3 個のパラメーター $\left\{f^0(x),\, f^1(x),\, \omega(x)\right\}$ を持つため，結局，古典的には，$h_{\alpha\beta}$ の自由度はゲージ対称性により完全に消されてしまう．しかし，あとで示すように，Diff_2 を尊重するように紫外正則化を行うと，Weyl 対称性は量子化の過程で破れてしまう（量子異常）．一般に，十分なめらかな時空多様体を記述するには，弦が埋め込まれる時空の次元は臨界次元（世界面に超対称性がある場合には 10 次元，そうでないときは 26 次元）でなくてはならない．臨界次元にある弦を**臨界弦**，そうでないときは**非臨界弦**と呼ぶ．

6.1.4 閉弦の振動モードと重力子

Polyakov 作用の運動方程式は X^μ と $h_{\alpha\beta}$ それぞれに対し，

$$0 \equiv \Delta X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-h}}\,\partial_\alpha\big(\sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}\,\partial_\beta X^\mu\big)\,, \tag{6.26}$$

$$0 \equiv T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\left[\partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2}\left(h^{\gamma\delta}\,\partial_\gamma X^\mu\,\partial_\delta X_\mu\right)h_{\alpha\beta}\right] \tag{6.27}$$

となる．$T_{\alpha\beta}$ は世界面のエネルギー運動量テンソルで，第 2 式はもちろん (6.20) 式と同じである．古典的 Weyl 不変性を反映して，$T_{\alpha\beta}$ のトレースは（運動方程式を課さなくても代数的に）そもそもゼロであることに注意せよ：$T^\alpha_\alpha = 0$．

今ゲージ対称性として $\mathrm{Diff}_2 \times \mathrm{Weyl}$ があるため，世界面の計量 $h_{\alpha\beta}$ は局所的に平坦にすることができる：

$$\mathrm{d}s_2^2 = \eta_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}\xi^\alpha\,\mathrm{d}\xi^\beta = -\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\sigma^2\,. \tag{6.28}$$

このとき，上の運動方程式の第 1 式 (6.26) は

$$0 = (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu \tag{6.29}$$

と波動方程式になるのですぐに解くことができ，解は左進行波と右進行波の重ね合わせとなる：

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X_L^\mu(\tau+\sigma) + X_R^\mu(\tau-\sigma)\,. \tag{6.30}$$

ここで，光円錐座標

$$\sigma^\pm \equiv \tau \pm \sigma \tag{6.31}$$

を導入すれば，

$$\partial_\pm = \frac{1}{2}\,(\partial_\tau \pm \partial_\sigma)\,, \tag{6.32}$$

$$\mathrm{d}s_2^2 = -\mathrm{d}\sigma^+\mathrm{d}\sigma^- \quad \left(\because\, \eta_{+-} = \eta_{-+} = -\frac{1}{2},\ \eta_{++} = \eta_{--} = 0\right) \tag{6.33}$$

より，運動方程式の第 2 式 (6.27) は

$$T_{++} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\,\partial_+ X_L\cdot\partial_+ X_L = 0\,, \tag{6.34}$$
$$T_{--} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\,\partial_- X_R\cdot\partial_- X_R = 0 \tag{6.35}$$

となる（$T_{+-}\propto T^\alpha_\alpha = 0$ に注意）.

ここから量子化を行うには何通りかの方法がある．一つはできるだけ共変に行う方法で，まずは $X^\mu(\tau,\sigma)$ について量子化を行い，その後で $T_{\pm\pm}=0$ の条件を「物理的状態が満たすべき条件」として課すものである．もう一つの方法は，光円錐ゲージを置くなどして $T_{\pm\pm}=0$ の方程式を先に解いてしまい，物理的自由度に対してのみ量子化を行うものである．具体的な計算をする場合には後者のほうが優れているが，ゲージ対称性がどのように現れるかを見るには前者の方法のほうが適している．以下，前者の方法について説明する*6)．また，とくに断らない限り，標的空間の次元は $d=26$ であるとする．

閉弦の周期境界条件を満たすように場を

$$X^\mu_L(\tau+\sigma) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2}\,p^\mu(\tau+\sigma) + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha^\mu_n}{n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau+\sigma)}\,, \tag{6.36}$$
$$X^\mu_R(\tau-\sigma) = \frac{x^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2}\,p^\mu(\tau-\sigma) + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\tilde\alpha^\mu_n}{n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau-\sigma)} \tag{6.37}$$

とモード展開すれば*7)，X^μ と $\pi_\mu \equiv \partial\mathcal{L}/\partial\dot X^\mu = (1/2\pi\alpha')\,\dot X_\mu$ の正準交換関係

$$\begin{aligned}&\big[X^\mu(\tau,\sigma),\pi_\nu(\tau,\sigma')\big] = \mathrm{i}\,\delta^\mu_\nu\,\delta(\sigma-\sigma')\,,\\ &\big[X^\mu(\tau,\sigma),X^\nu(\tau,\sigma')\big] = \big[\pi_\mu(\tau,\sigma),\pi_\nu(\tau,\sigma')\big] = 0\end{aligned} \tag{6.38}$$

は次と等価になる：

$$\begin{aligned}&\big[\alpha^\mu_m,\alpha^\nu_n\big] = m\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{m+n,0}\,,\quad \big[\tilde\alpha^\mu_m,\tilde\alpha^\nu_n\big] = m\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{m+n,0}\,,\\ &\big[x^\mu,p^\nu\big] = \mathrm{i}\eta^{\mu\nu}\,,\quad \big[\alpha^\mu_m,\tilde\alpha^\nu_n\big] = 0\,.\end{aligned} \tag{6.39}$$

なお，X^μ_L, X^μ_R ともに実場であるので，$\alpha^\mu_{-n} = (\alpha^\mu_n)^\dagger$, $\tilde\alpha^\mu_{-n} = (\tilde\alpha^\mu_n)^\dagger$ である．また，(6.36), (6.37) より，n の正負は振動数の正負と同じことが分かり，α^μ_n $(n>0)$ が消滅演算子，α^μ_{-n} $(n>0)$ が生成演算子に対応する*8)．

$T_{\pm\pm}$ は次のように Fourier 展開できる：

$$T_{++}(\tau+\sigma) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau+\sigma)}\,, \tag{6.40}$$

---

*6) この他に，Diff_2 のゲージ固定に伴うゴースト場を導入して BRST 形式を構成し，「物理的状態が満たすべき条件」として九後–小嶋の補助条件を課すという「現代的な共変的量子化 (modern covariant quantization)」もある [65], [66]．共形不変性を最大限に用いた解析を行うのに最も適した形式である．

*7) $X^\mu_{L,R}$ の中の $\tau\pm\sigma$ の項は周期的でないが，2 つを足したものは正しく周期的である．

*8) $a^\mu_n \equiv \alpha^\mu_n/\sqrt{n}$, $a^\mu_n{}^\dagger \equiv \alpha^\mu_{-n}/\sqrt{n}$ $(n>0)$ と置けば，これらは通常の交換関係を満たす：$\big[a^\mu_m,\, a^\nu_n{}^\dagger\big] = \eta^{\mu\nu}\delta_{m,n}$．

$$T_{--}(\tau-\sigma)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{L}_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau-\sigma)}\ . \tag{6.41}$$

ここで，$\alpha_0^\mu\equiv\tilde{\alpha}_0^\mu\equiv\sqrt{\alpha'/2}\,p^\mu$ として，

$$L_n=\frac{1}{2}\ :\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha_{n-m}\cdot\alpha_m\ :, \tag{6.42}$$

$$\tilde{L}_n=\frac{1}{2}\ :\sum_{m\in\mathbb{Z}}\tilde{\alpha}_{n-m}\cdot\tilde{\alpha}_m\ : \tag{6.43}$$

である．正規順序：：が必要となるのは $n=0$ の場合だけであり，そのときは

$$L_0=\frac{1}{2}\,\alpha_0^2+N_L=\frac{\alpha'}{4}\,p^2+N_L\quad\Bigl(N_L\equiv\sum_{n\geq1}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n\Bigr), \tag{6.44}$$

$$\tilde{L}_0=\frac{1}{2}\,\alpha_0^2+N_R=\frac{\alpha'}{4}\,p^2+N_R\quad\Bigl(N_R\equiv\sum_{n\geq1}\tilde{\alpha}_{-n}\cdot\tilde{\alpha}_n\Bigr) \tag{6.45}$$

である．ここで，N_L と N_R は，それぞれ左進行波と右進行波のエネルギーの総和を表し，**レベル演算子**と呼ばれる．容易な計算から分かるように，$\{L_n\}$ と $\{\tilde{L}_n\}$ は，それぞれ独立に次の **Virasoro 代数**を満たす：

$$[L_m,\,L_n]=(m-n)\,L_{m+n}+\frac{c}{12}\,(m^3-m)\,\delta_{m+n,0}\,, \tag{6.46}$$

$$[\tilde{L}_m,\,\tilde{L}_n]=(m-n)\,\tilde{L}_{m+n}+\frac{c}{12}\,(m^3-m)\,\delta_{m+n,0}\,, \tag{6.47}$$

$$[L_m,\,\tilde{L}_n]=0\,. \tag{6.48}$$

ここで，c は**中心電荷** (central charge) と呼ばれ，今の場合には $c=d=26$ である．

上の生成・消滅演算子を用いて，弦の Hilbert 空間を作っていこう．運動量演算子 p^μ は生成・消滅演算子 $\{\alpha_n^\mu,\,\tilde{\alpha}_n^\mu\ (n\neq0)\}$ と交換するので，調和振動子の真空（消滅演算子で消える状態）は p^μ の固有値分だけ縮退しており，それを $k=(k^\mu)$ でラベルする：

$$\alpha_n^\mu\,|k\rangle=\tilde{\alpha}_n^\mu\,|k\rangle=0\quad(n\geq1)\,, \tag{6.49}$$

$$p^\mu\,|k\rangle=k^\mu\,|k\rangle\,. \tag{6.50}$$

すると，弦の Hilbert 空間は，それぞれの $|k\rangle$ の上に作られた Fock 空間の直和になる：

$$\mathcal{H}=\bigoplus_k\mathcal{H}_k\,, \tag{6.51}$$

$$\mathcal{H}_k=\bigl\{\alpha_{-1}^{\mu_1}\cdots\alpha_{-2}^{\mu_2}\cdots\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu_1}\cdots\tilde{\alpha}_{-2}^{\nu_2}\cdots\,|k\rangle\bigr\}\,. \tag{6.52}$$

$T_{\pm\pm}=0$ は，古典的運動方程式の一部であるが，これを量子力学的状態に対する条件として課そうとすると，電磁場の正準量子化における Gupta–Bleuler

条件と同様に，$T_{\pm\pm}$ の正エネルギーモードに対してしか条件を課すことができない．そこで，物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ が満たすべき条件を

$$L_n\,|\mathrm{phys}\rangle = 0\,,\quad \tilde{L}_n\,|\mathrm{phys}\rangle = 0 \quad (n \geq 1) \tag{6.53}$$

と設定する．なお，2 次元の場の理論ではゼロモードの寄与も慎重に取り扱う必要がある．L_0, $\tilde{L}_0$ で正規順序をとる際の不定性が付くが，次のようにとればよいことが分かっている [58]：

$$(L_0 - 1)\,|\mathrm{phys}\rangle = 0\,,\quad (\tilde{L}_0 - 1)\,|\mathrm{phys}\rangle = 0\,. \tag{6.54}$$

(6.53) 式と (6.54) 式を合わせて **Virasoro 条件**という．こうして，物理的状態が作る Hilbert 空間は次となる：

$$\mathcal{H}_{\mathrm{phys}} \equiv \big\{|\mathrm{phys}\rangle\big\} \equiv \big\{|\psi\rangle \in \mathcal{H}\,\big|\,(L_n - \delta_{n,0})\,|\psi\rangle = 0\ (n \geq 0)\big\}\,. \tag{6.55}$$

なお，(6.54) 式の左辺から右辺を引くと，(6.44) と (6.45) より

$$(N_L - N_R)\,|\mathrm{phys}\rangle = 0 \tag{6.56}$$

が得られるが，これは左進行波のレベルと右進行波のレベルが一致すべきことを表している．これを**レベル一致条件** (level matching condition) と呼ぶ．また，(6.54) の条件において質量殻の関係 $m^2 = -k^2$ を用いれば，物理的状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ に対応する粒子の質量が

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}\,(N_L - 1) = \frac{4}{\alpha'}\,(N_R - 1) \tag{6.57}$$

で与えられることが分かる．これを**質量公式**と呼ぶ．

話はここで終わらない．物理的 Hilbert 空間の中で，$L_{-1}^{n_1} L_{-2}^{n_2} \cdots \tilde{L}_{-1}^{m_1} \tilde{L}_{-2}^{m_2} \cdots |\chi\rangle$（$n_1, n_2, \ldots, m_1, m_2, \ldots \geq 0$, どれか 1 つは必ず正）の線形結合で与えられるものは，（自分自身も含め）すべての物理的状態と直交する．従って，共形対称性が成立するような物理的振幅を計算する際には，そうした物理的状態は実質ゼロベクトルと扱ってよく，無視できる．もう少し正確に述べると，2 つの物理的状態 $|\mathrm{phys}_1\rangle$ と $|\mathrm{phys}_2\rangle$ の間に

$$\begin{aligned} &|\mathrm{phys}_1\rangle \sim |\mathrm{phys}_2\rangle \\ &\iff |\mathrm{phys}_1\rangle - |\mathrm{phys}_2\rangle = \big(\,L_{-1}^{n_1} \cdots \tilde{L}_{-1}^{m_1} \cdots |\chi\rangle \text{ の線形結合}\big) \end{aligned} \tag{6.58}$$

という同値関係を入れれば，**同値な物理的状態は物理的振幅に対し全く同じ寄与を与える**．

以上で必要な準備がそろったので，物理的状態を N_L, N_R の小さいほうから作ってみよう．レベル一致条件より $N_L = N_R$ であることを思い出そう．

まず，$N_L = N_R = 0$，つまり，調和振動子の真空が物理的状態の場合を考える:

<u>レベル 0:</u>　$|\mathrm{phys}\rangle = |k\rangle\,.$ (6.59)

これは $L_n = \tilde{L}_n = 0$ $(n \geq 1)$ を自明に満たし，また $L_0 = \tilde{L}_0 = 1$ の質量殻条件より $m^2 = -k^2 = -4/\alpha' < 0$ でなくてはならない．こうして，基底状態 $|k\rangle$ はタキオン粒子に対応することが分かる．

最初の励起状態は $N_L = N_R = 1$ で与えられ，

<u>レベル 1:</u>　$|\mathrm{phys}\rangle = \alpha^{\mu}_{-1}\tilde{\alpha}^{\nu}_{-1}|k\rangle\,\zeta_{\mu\nu}(k)$ (6.60)

の形になる．すると，Virasoro 条件 $L_0 = \tilde{L}_0 = 1$ と $L_1 = \tilde{L}_1 = 0$ より，

$$k^2 = 0\,,\quad k^{\mu}\,\zeta_{\mu\nu}(k) = k^{\nu}\,\zeta_{\mu\nu}(k) = 0 \tag{6.61}$$

でなくてはならないことが分かる*9)．つまり，この物理的状態は，ゼロ質量のテンソル場に対応する．

この対応をもう少し見るため，2 階テンソルの足を，トレース部分，対称トレースレス部分（$\langle\ \rangle$ で表す），反対称部分の 3 つに分ければ，

$$\alpha_{-1}\cdot\tilde{\alpha}_{-1}\,|k\rangle \ \Leftrightarrow\ \text{ディラトン場}\ \Phi(x)\,, \tag{6.62}$$

$$\alpha^{\langle\mu}_{-1}\,\tilde{\alpha}^{\nu\rangle}_{-1}\,|k\rangle \ \Leftrightarrow\ \text{重力場}\ G_{\mu\nu}(x)\,, \tag{6.63}$$

$$\alpha^{[\mu}_{-1}\,\tilde{\alpha}^{\nu]}_{-1}\,|k\rangle \ \Leftrightarrow\ 2\ \text{階反対称テンソル場}\ B_{\mu\nu}(x) \tag{6.64}$$

と対応する．さらに，状態

$$\begin{aligned}
&L_{-1}\left(\tilde{\alpha}^{\nu}_{-1}\,|k\rangle\,\tilde{\epsilon}_{\nu}(k)\right) + \tilde{L}_{-1}\left(\alpha^{\mu}_{-1}\,|k\rangle\,\epsilon_{\mu}(k)\right)\\
&\propto \alpha^{\mu}_{-1}\,\tilde{\alpha}^{\nu}_{-1}\,|k\rangle \times \left[k_{\mu}\,\tilde{\epsilon}_{\nu}(k) + \epsilon_{\mu}(k)\,k_{\nu}\right]\\
&\qquad \left[k^2 = 0\,,\ k^{\mu}\,\epsilon_{\mu}(k) = k^{\mu}\,\tilde{\epsilon}_{\mu}(k) = 0\right]
\end{aligned} \tag{6.65}$$

は上で述べた “無視できる物理的状態” となり，

$$\zeta_{\mu\nu}(k) \sim \zeta_{\mu\nu}(k) + k_{\mu}\,\tilde{\epsilon}_{\nu}(k) + \epsilon_{\mu}(k)\,k_{\nu} \tag{6.66}$$

という同値関係が得られる．これはまさに偏極テンソル $\zeta_{\mu\nu}(k)$ に対するゲージ変換である．とくに対称成分については $\tilde{\epsilon}_{\mu}(k) = \epsilon_{\mu}(k)$ となるので，(6.66) 式の右辺は重力場の無限小一般座標変換を表す $[\Leftrightarrow\ \eta_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + \pounds_{\epsilon}\eta_{\mu\nu}]$.

2 階テンソル場の物理的自由度を勘定しておこう．まず，ゲージ変換［(6.66) 式の右辺］を用いれば，必ず $\zeta_{0\mu}(k) = \zeta_{\mu 0}(k) = 0$ とできることに注意する．つまり，$\zeta_{\mu\nu}(k)$ は，空間的な成分 $\zeta_{ij}(k)$ $(i, j = 1, \ldots, 25)$ だけがあるとしてよい．すると，(6.61) 式より

$$0 = k^{\mu}\zeta_{\mu j}(k) = k^{i}\zeta_{ij}(k)\,,\quad 0 = \zeta_{i\mu}(k)\,k^{\mu} = \zeta_{ij}(k)\,k^{j} \tag{6.67}$$

---

*9)　残りの Virasoro 条件 $[L_n = \tilde{L}_n = 0\ (n \geq 2)]$ は自動的に満たされる．

となり，$\zeta_{ij}(k)$ には，$(d-2)\times(d-2)=24\times 24$ の横波モード (transverse mode) しか残らないことが分かる．今はゼロ質量 $k^2=0$ であるので，$k=(k^\mu)$ を不変に保つ小群 (little group) は $SO(d-2)=SO(24)$ であり，上の 24×24 の自由度は，$SO(24)$ のベクトル表現 $\mathbf{24_v}=\square$ のテンソル積表現に属する：

$$\mathbf{24_v}\otimes\mathbf{24_v}=\square\otimes\square. \tag{6.68}$$

上で述べた (6.62)–(6.64) の分解は，

$$\square\otimes\square=\bullet\oplus\square\!\square\oplus\begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array} \tag{6.69}$$

という既約分解に対応している．

6.1.5 開弦の振動モードと Yang–Mills 場

閉弦では，左進行波と右進行波が（レベル一致条件を除けば）独立に運動できた．開弦の場合には，定在波が立つように両者は関係しなくてはならない．

境界があるときの Polyakov 作用は次で与えられる：

$$I=\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\tau_i}^{\tau_f}\mathrm{d}\tau\int_0^\pi\mathrm{d}\sigma\left[\frac{1}{2}\dot{X}^2-\frac{1}{2}X'^2\right]. \tag{6.70}$$

運動方程式を求めるため，時間方向の境界で場の値を固定して変分をとれば，

$$\begin{aligned}\delta I=&-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\tau_i}^{\tau_f}\mathrm{d}\tau\int_0^\pi\mathrm{d}\sigma\,\delta X^\mu\big(\ddot{X}_\mu-X''_\mu\big)\\&+\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(X_\mu\,\delta X^\mu\right)\big|_{\sigma=0}-\frac{1}{2\pi\alpha'}\left(X'_\mu\,\delta X^\mu\right)\big|_{\sigma=\pi}\end{aligned} \tag{6.71}$$

となる．こうして，運動方程式は，世界面の内部に対して

$$(\partial_\tau^2-\partial_\sigma^2)\,X^\mu=0\quad(\text{内部：}\forall\tau\text{ および }0<\sigma<\pi), \tag{6.72}$$

また，世界面の境界に対して，

$$X'_\mu\,\delta X^\mu=0\quad(\text{境界：}\forall\tau\text{ および }\sigma=0,\,\pi) \tag{6.73}$$

となる．最初の運動方程式は，閉弦と同様に，

$$X^\mu(\tau,\sigma)=X_L^\mu(\tau+\sigma)+X_R^\mu(\tau-\sigma) \tag{6.74}$$

と解ける．境界上の運動方程式については，次の 2 通りが可能である：

$$X'_\mu(\tau,0)=0\,,\quad X'_\mu(\tau,\pi)=0\quad(\text{Neumann 条件})\,, \tag{6.75}$$

$$\delta X_\mu(\tau,0)=0\,,\quad \delta X_\mu(\tau,\pi)=0\quad(\text{Dirichlet 条件})\,. \tag{6.76}$$

Poincaré 対称性を保つのは，すべての μ と $\sigma=0,\pi$ の両方に対して Neumann 条件が課されている場合である．本小節ではまずこの場合を考え，それ以外の

場合は次の小節で扱う.

Neumann 境界条件のもとでは，場 $X^\mu(\tau,\sigma)$ $(0\le\sigma\le\pi)$ は次のようにモード展開される：

$$X^\mu(\tau,\sigma)=x^\mu+2\alpha' p^\mu\tau+\mathrm{i}\sqrt{2\alpha'}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau}\cos n\sigma\,. \tag{6.77}$$

これは,

$$X_L^\mu(\tau+\sigma)=\frac{x^\mu}{2}+\alpha' p^\mu(\tau+\sigma)+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau+\sigma)}\,, \tag{6.78}$$

$$X_R^\mu(\tau-\sigma)=\frac{x^\mu}{2}+\alpha' p^\mu(\tau-\sigma)+\mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\mu}{n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau-\sigma)} \tag{6.79}$$

とも書ける．X^μ と $\pi_\mu=(1/2\pi\alpha')\,\dot{X}_\mu$ に対する正準交換関係は次と等価になる：

$$\left[\alpha_m^\mu,\alpha_n^\nu\right]=m\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{m+n,0}\,,\quad \left[x^\mu,p^\nu\right]=\mathrm{i}\eta^{\mu\nu}. \tag{6.80}$$

なお，X^μ は実場であるので，$\alpha_{-n}^\mu=(\alpha_n^\mu)^\dagger$ である.

エネルギー運動量テンソルを計算すれば，$\alpha_0^\mu\equiv\sqrt{2\alpha'}\,p^\mu$ として,

$$T_{\pm\pm}=\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau\pm\sigma)}\,, \tag{6.81}$$

$$L_n=\frac{1}{2}:\sum_{m\in\mathbb{Z}}\alpha_{n-m}\cdot\alpha_m: \tag{6.82}$$

となる．物理的状態に対する Virasoro 条件は

$$L_n\,|\mathrm{phys}\rangle=0\quad(n\ge 1)\,,\quad (L_0-1)\,|\mathrm{phys}\rangle=0 \tag{6.83}$$

となり，これより質量公式が

$$m^2=\frac{1}{\alpha'}\,(N-1)\quad\Big(N\equiv\sum_{n\ge 1}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n\Big) \tag{6.84}$$

となることが分かる．また，2 つの物理的状態 $|\mathrm{phys}_1\rangle$ と $|\mathrm{phys}_2\rangle$ の間には,

$$\begin{aligned}&|\mathrm{phys}_1\rangle\sim|\mathrm{phys}_2\rangle\\ &\Longleftrightarrow\ |\mathrm{phys}_1\rangle-|\mathrm{phys}_2\rangle=\big(L_{-1}^{n_1}L_{-2}^{n_2}\cdots|\chi\rangle\ \text{の線形結合}\big)\end{aligned} \tag{6.85}$$

という同値関係が入る.

閉弦の場合と同様に，レベル N の小さいほうから物理的状態が構成できる．まず，振動の基底状態は

$$\underline{\text{レベル 0:}}\quad |\mathrm{phys}\rangle=|k\rangle\quad(k^2=1/\alpha') \tag{6.86}$$

となる．これは，$m^2=-k^2=-1/\alpha'$ のタキオン粒子に対応する．最初の励起

状態は次で与えられる：

$$\underline{\text{レベル 1:}} \quad |\text{phys}\rangle = \alpha_{-1}^{\mu}|k\rangle\,\zeta_\mu(k)\,. \tag{6.87}$$

Virasoro 条件より，運動量 $k=(k^\mu)$ と偏極ベクトル $\zeta_\mu(k)$ は,

$$k^2 = 0\,, \quad k^\mu\,\zeta_\mu(k) = 0 \tag{6.88}$$

を満たさなくてはならない．これにより，この物理的状態がゼロ質量のベクトル粒子を表すことが分かる．さらに，“無視できる物理的状態” として $L_{-1}|k\rangle \propto \alpha_{-1}^{\mu}\,|k\rangle\,k_\mu$ $(k^2=0)$ を持ってくれば，次の同値関係があることが分かる：

$$\zeta_\mu(k) \sim \zeta_\mu(k) + k_\mu\,\epsilon(k)\,. \tag{6.89}$$

これは，ベクトル粒子に対するゲージ変換と等価である．こうして，開弦理論には，ゼロ質量のゲージ場が含まれていることが分かった．なお，このゲージ変換を用いれば，時間成分を 0 にすることができ $[\zeta_0(k)=0]$，さらに Virasoro 条件より，

$$k^\mu\zeta_\mu(k) = k^i\,\zeta_i(k) = 0 \tag{6.90}$$

となるので，$\zeta_\mu(k)$ は常に横波にとれることが分かる．こうして，第 1 励起状態の本当に物理的な自由度は $d-2=24$ 個となる．

Chan–Paton 因子と Yang–Mills 場

上で述べたゼロ質量のベクトル場は 1 種類しかないため，$U(1)$ ゲージ理論に対応する．しかし，開弦の 2 つの端点に添え字 $i,\bar{j}$ $(i,\bar{j}=1,\ldots,N)$ を割り当て*10)，形式的に N^2 個の線形独立な基底状態 $|k;i,\bar{j}\rangle$ を導入すれば，物理的状態として

$$|\text{phys}\rangle = \alpha_{-1}^{\mu}\,|k;i,\bar{j}\rangle\,\zeta_\mu^{i\bar{j}}(k) \tag{6.91}$$

という N^2 個のゼロ質量ベクトル場を導入することができる．これは，$U(N)$ の Yang–Mills 場に対応する [58], [59]．

6.1.6 Dirichlet 境界条件と D ブレーン

今度は，Dirichlet 境界条件について考える．一般に成分 μ ごとに異なる境界条件をとってよいので，以下，X^a $(a=0,1,\ldots,p)$ は両端が Neumann 境界条件，X^m $(m=p+1,\ldots,25)$ は両端が Dirichlet 境界条件という状況を考える（図 6.6）*11)：

---

*10)　このペア $(i,\bar{j})$ は **Chan–Paton 因子**と呼ばれる．

*11)　境界において $\delta X^m(\tau,\sigma)\big|_{\sigma=0,\pi}=0$ ということは，境界に沿って，X^m は一定値をとるということである．左端と右端の座標を x_0^m, x_1^m と置いた．

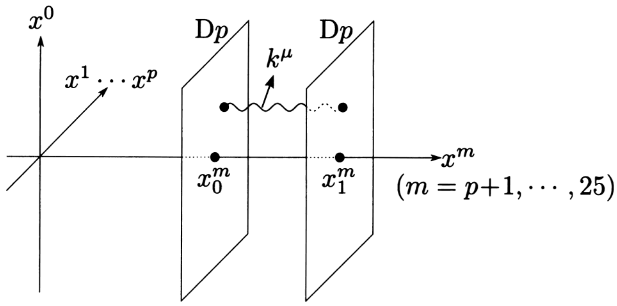


図 6.6　Dp ブレーンと開弦.

$$X^{a\prime}(\tau, \sigma = 0) = 0\,, \qquad X^{a\prime}(\tau, \sigma = \pi) = 0 \qquad (a = 0, 1, \ldots, p)\,, \tag{6.92}$$

$$X^m(\tau, \sigma = 0) = x_0^m\,, \quad X^m(\tau, \sigma = \pi) = x_1^m \quad (m = p+1, \ldots, 25)\,. \tag{6.93}$$

26 次元時空の中で，$x^m = x_0^m$ で定まる $(p+1)$ 次元面を **D*p* ブレーン**と呼ぶ．今，図 6.6 のように平行な Dp ブレーンが 2 枚あったとする．このとき，開弦の 2 つの端点がそれぞれの Dp ブレーンに乗っているとすると，開弦の重心は Dp ブレーンに平行な方向にしか運動できない．つまり，重心の運動量 $k = (k^\mu)$ は $(p+1)$ 次元方向にのみ 0 でない成分を持てる．こうして，開弦が記述する理論は実質的に $(p+1)$ 次元のものになる．

上のことをはっきりと見るために，実際にモード展開を行ってみよう．まず，両端が Neumann 境界条件の成分については，(6.77)–(6.79) より，

$$\begin{aligned} X^a(\tau, \sigma) &= x^a + 2\alpha' p^a \tau + \mathrm{i}\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^a}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \cos n\sigma \\ &= X_L^a(\tau + \sigma) + X_R^a(\tau - \sigma)\,, \end{aligned} \tag{6.94}$$

$$X_L^a(\tau + \sigma) = \frac{x^a}{2} + \alpha' p^a (\tau + \sigma) + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^a}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau+\sigma)}\,, \tag{6.95}$$

$$X_R^a(\tau - \sigma) = \frac{x^a}{2} + \alpha' p^a (\tau - \sigma) + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^a}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau-\sigma)} \tag{6.96}$$

となる．一方，両端を x_0^m と x_1^m に置いた Dirichlet 境界条件については，

$$\begin{aligned} X^m(\tau, \sigma) &= x_0^m + (x_1^m - x_0^m)\,\frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^m}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\tau} \sin n\sigma \\ &= X_L^m(\tau + \sigma) + X_R^m(\tau - \sigma)\,, \end{aligned} \tag{6.97}$$

$$X_L^m(\tau + \sigma) = \frac{x_0^m}{2} + (x_1^m - x_0^m)\,\frac{\tau + \sigma}{2\pi} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^m}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau+\sigma)}\,, \tag{6.98}$$

$$X_R^m(\tau+\sigma) = \frac{x_0^m}{2} - (x_1^m - x_0^m)\,\frac{\tau-\sigma}{2\pi} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^m}{n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau-\sigma)} \tag{6.99}$$

となる[*12]．すると，エネルギー運動量テンソルは，

$$\begin{aligned} T_{\pm\pm} &= \frac{1}{2\pi\alpha'}\left[\eta_{ab}\,\partial_\pm X^a \partial_\pm X^b + \delta_{m\ell}\,\partial_\pm X^m \partial_\pm X^\ell\right] \\ &\equiv \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(L_n^{(\mathrm{NN})} + L_n^{(\mathrm{DD})}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(\tau\pm\sigma)}, \end{aligned} \tag{6.100}$$

$$L_n^{(\mathrm{NN})} = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\eta_{ab}\ :\alpha_{n-m}^a\alpha_m^b:\quad \left(\alpha_0^a \equiv \sqrt{2\alpha'}\,p^a\right), \tag{6.101}$$

$$L_n^{(\mathrm{DD})} = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\delta_{m\ell}\ :\alpha_{n-m}^m\alpha_m^\ell:\quad \left(\alpha_0^m \equiv \frac{(x_1-x_0)^m}{\pi\sqrt{2\alpha'}}\right) \tag{6.102}$$

と表される．これより，質量公式は[*13]，

$$\begin{aligned} 0 = L_0 - 1 &= \frac{1}{2}(\alpha_0^a)^2 + \sum_{n\geq 1}\alpha_{-n}^a\,\alpha_n^a + \frac{1}{2}(\alpha_0^m)^2 + \sum_{n\geq 1}\alpha_{-n}^m\,\alpha_n^m - 1 \\ &= \alpha'(p^a)^2 + \frac{1}{4\pi^2\alpha'}(x_1^m - x_0^m)^2 + \sum_{n\geq 1}\left(\alpha_{-n}^a\,\alpha_n^a + \alpha_{-n}^m\,\alpha_n^m\right) - 1 \end{aligned} \tag{6.103}$$

より，

$$m^2 = -(p^a)^2 = \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\,|x_1 - x_0|\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1) \tag{6.104}$$

となる．ここで，$N = \sum_{n\geq 1}\left(\alpha_{-n}^a\,\alpha_n^a + \alpha_{-n}^m\,\alpha_n^m\right) = \sum_{n\geq 1}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n$ は，全ての方向の振動モードの寄与を足したものである．この式より，2 つの Dp ブレーンに端点を持つ開弦の質量は，ブレーン間の距離に比例した張力エネルギー $(1/2\pi\alpha')|x_1 - x_0|$ と振動エネルギー $\sqrt{(1/\alpha')(N-1)}$ の組み合わせとして表されることが分かる．

こうして，調和振動子の真空は，$(p+1)$ 次元運動量演算子 p^a の固有値 $k = (k^a)$ $(a = 0, 1, \ldots, p)$ と 2 つのブレーンの位置 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0^m)$, $\boldsymbol{x}_1 = (x_1^m)$ でラベルされ，とくに物理的第 1 励起状態は

$$\begin{aligned} &|\mathrm{phys}\rangle = \alpha_{-1}^\mu\,|k;\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1\rangle\,\zeta_\mu(k) \\ &\left(k^2 = (k^a)^2 = \frac{-1}{2\pi\alpha'}\,|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0|,\quad k^a\zeta_a(k) = 0\right), \end{aligned} \tag{6.105}$$

と書ける．対応する 26 成分のベクトル場は，$(p+1)$ 次元の場の理論として 2

*12) ここで，X^m については，位置演算子 x^m や運動量演算子 p^m が無いことに注意せよ．実際，振動モード α_n^m $(n \neq 0)$ の交換関係だけで，X^m と $\pi_m = (1/2\pi\alpha')\,\dot{X}_m$ の間の正準交換関係が正しく導かれる．

*13) 定数の "-1" は振動モード α_n^μ $(n \neq 0)$ の正規順序から来ているので，全ての方向が Neumann 境界条件の場合と同じになる．

種類に分けることができ $[x=(x^a)]$,

$$A_a(x):\quad (p+1)\,\text{次元ベクトル場}\quad (a=0,1,\ldots,p)\,, \tag{6.106}$$

$$\Phi_m(x):\quad (25-p)\,\text{個のスカラー場}\quad (m=p+1,\ldots,25) \tag{6.107}$$

となる．これらはいずれもブレーンの距離に比例した質量を持つ：$m = (1/2\pi\alpha')\,|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|$. しかし，2つのブレーンを重ねると $m=0$ となり，$(p+1)$ 次元 $U(1)$ ゲージ場と $(25-p)$ 個のスカラー場になる．

さらに，前小節と同様に Chan–Paton 因子 $(i,\bar{j})$ $(i,\bar{j}=1,\ldots,N)$ を導入することができる．このとき，端点が乗ることが可能な N 枚のブレーンをすべて同じ位置に置けば，ベクトル場 $A_a(x)=\left(A_a^{i\bar{j}}\right)$ と $(25-p)$ 個のスカラー場 $\Phi_m(x)=\left(\Phi_m^{i\bar{j}}\right)$ は，それぞれ，$(p+1)$ 次元 $U(N)$ ゲージ理論における Yang–Mills 場とスカラー場になり，いずれも $U(N)$ の随伴表現に属する．

6.1.7 世界面理論の Weyl 不変性

$h_{\alpha\beta}$ の自由度を完全に落とせるためには，Weyl 対称性が量子論的に成立している必要がある．これは 2 次元世界面上の場の理論として見たとき，くりこみ群ベータ関数が消えることと等価である．

今，作用 (6.21) を，より一般化した非線形シグマ (NLσ) 模型作用*14)

$$\begin{aligned} I[X^\mu,h_{\alpha\beta}] &= \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{d}^2\xi\left\{\frac{1}{\alpha'}\left[-\sqrt{-h}\,h^{\alpha\beta}G_{\mu\nu}(X)+\epsilon^{\alpha\beta}B_{\mu\nu}(X)\right]\partial_\alpha X^\mu\,\partial_\beta X^\nu\right.\\ &\qquad\left. +\sqrt{-h}\,R_h\,\Phi(X)\right\} \end{aligned} \tag{6.108}$$

を考えてみよう．以下簡単のため，閉弦が作る世界面のみ考える．ディラトン場 $\Phi(X)$ を含む項が，最初の 2 項に比べて α' の高次であることと，Weyl 対称性をあらわに破っていることに注意せよ．実際この項は，Weyl 不変性が量子効果により破れる際に必要となる．なお，世界面上で経路積分を Euclid 化すると，$(1/4\pi)\int\mathrm{d}^2\xi\sqrt{h}\,R_h$ が世界面の Euler 数 $\chi=2-2L$（L は世界面のハンドルの数*15)）を与えることから，$\Phi(X)$ の期待値 $\langle\Phi(X)\rangle$ が定数 $(=\Phi_0)$ の場合は，作用 (6.108) 第 3 項からの寄与は

$$\mathrm{e}^{-\Phi_0\,(2-2L)}=\left(\mathrm{e}^{\Phi_0}\right)^{2L-2} \tag{6.109}$$

となり，ハンドルが 1 つ増えるごとに（つまりループが 1 つ増えるごとに）$\mathrm{e}^{2\Phi_0}$ がかかることが分かる．このように，

$$g_s\equiv\mathrm{e}^{\Phi_0} \tag{6.110}$$

*14) R_h は世界面の計量 $h_{\alpha\beta}$ から作られる Ricci スカラーである．

*15) **種数** (genus) ともいう．

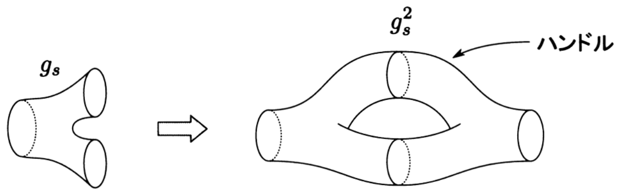


図 6.7　閉弦の 3 点結合．2 つ合わせればループが作れる．

は閉弦の 3 点結合定数に対応し，**弦の結合定数** (string coupling) と呼ばれる（図 6.7）．

上の NLσ 模型作用では，標的空間のテンソル場 $g_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$, $\Phi(X)$ が世界面上の場の理論の相互作用を表している．実際にベータ関数を計算すると次が得られる [58], [59]：

$$\beta[G_{\mu\nu}(X)] = \alpha' \left[R_{\mu\nu} + 2\,\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4}\, H_{\mu\rho\sigma}\, H_\nu{}^{\rho\sigma} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2)$$

$$\bigl(H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}\bigr)\,, \tag{6.111}$$

$$\beta[B_{\mu\nu}(X)] = \alpha' \left[-\frac{1}{2}\, \nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} + \nabla^\rho \Phi\, H_{\rho\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2)\,, \tag{6.112}$$

$$\beta[\Phi(X)] = \frac{d-26}{6} + \alpha' \left[-\frac{1}{2}\, \nabla^2 \Phi + \nabla_\rho \Phi\, \nabla^\rho \Phi - \frac{1}{24}\, H_{\lambda\mu\nu}\, H^{\lambda\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2)\,. \tag{6.113}$$

とくに (6.111) 式を見ると，$\beta[G_{\mu\nu}(X)] = 0$ は Einstein 方程式とみなせることが分かる．また，(6.113) 式より，場が $\ell_s = \sqrt{\alpha'}$ のスケールで値が急激に変化しないことを要求すると（つまり $\bigl|\partial_\mu(d\text{ 次元の場})\bigr| \ll 1/\ell_s = 1/\sqrt{\alpha'}$），時空の次元が臨界次元の 26 でなくてはならないことが分かる．

6.1.8　ベータ関数のゼロ点と有効作用

面白いことに，上のベータ関数 $\beta = 0$ の式は，作用

$$S[G_{\mu\nu}(x), B_{\mu\nu}(x), \Phi(x)] = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int \mathrm{d}^d x\, \sqrt{-G}\; \mathrm{e}^{-2\Phi} \left[-\frac{2(d-26)}{3\alpha'} + R - \frac{1}{12}\, H_{\lambda\mu\nu}\, H^{\lambda\mu\nu} + 4\partial_\mu \Phi\, \nabla^\mu \Phi + \mathcal{O}(\alpha') \right] \tag{6.114}$$

の運動方程式と等価になっている．例えば，

$$\beta[B_{\mu\nu}(x)] \propto \frac{\delta}{\delta B^{\mu\nu}(x)} S[G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi]\,. \tag{6.115}$$

このように，弦理論として許される背景場 $\{G_{\mu\nu},\, B_{\mu\nu},\, \Phi\}$ の配位は，作用 $S[G_{\mu\nu}(x), \ldots]$ の古典解を解くことによって得られる．この作用を**ボソン弦の有効作用**という．α' の高次補正は，世界面の理論（2 次元場の量子論）の立

場では高次ループ補正であるが，標的空間の立場では，弦の高次の振動モード から来る高階微分の寄与を表している．

なお，今の作用 (6.114) は，ディラトン場 $\Phi(x)$ を用いて

$$S[G_{\mu\nu}(x), \Phi(x), \ldots] = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-G}\, \mathrm{e}^{-2\Phi} \left(R[G] + \cdots\right) \quad (6.116)$$

の形に表されているが，$d > 2$ では，計量テンソルを $G_{\mu\nu}$ から

$$G^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}(x) \equiv \mathrm{e}^{-\beta\,\Phi(x)}\, G_{\mu\nu}(x) \quad \left(\beta = \frac{4}{d-2}\right) \quad (6.117)$$

と Weyl 変換したものに再定義することによって，

$$S'[G^{\mathrm{E}}_{\mu\nu}(x), \Phi(x), \ldots] = \frac{1}{2\kappa_d^2} \int \mathrm{d}^d x \sqrt{-G_{\mathrm{E}}} \left(R[G_{\mathrm{E}}] + \cdots\right) \quad (6.118)$$

の形にできる．一般に，作用が (6.116) の形に書かれる計量テンソルは**ストリングフレーム** (string frame) の計量と呼ばれ，一方，作用が (6.118) の形に書かれる計量テンソルは **Einstein フレーム** (Einstein frame) の計量と呼ばれる．以下，Bekenstein–Hawking エントロピーを計算するときは Einstein フレームの計量を用いて行う．

6.1.9 II 型超弦理論のゼロ質量モード

上記のボソン弦はスカラー場，ベクトル場，テンソル場，... と整数スピンの場しか記述できない．もし弦理論が万物に対する究極の統一理論であり，標準模型を弦理論の低エネルギー有効理論として正しく再現できるためには，弦理論の枠内でフェルミオンも記述できなくてはならない．

そのためには，現在 3 つの方法が知られている*16)．

(1) Ramond–Neveu–Schwarz (RNS) 形式：

この形式では，まず世界面上に超対称性を導入し，$X^\mu(\xi)$ の超対称パートナーとして世界面上の 2 成分 Majorana フェルミオン $\psi^\mu(\xi)$ を用意する．運動方程式を用いると，$\psi^\mu(\xi)$ は，2 次元カイラリティが負の左進行波 $\psi^\mu_L(\tau+\sigma)$ とカイラリティが正の右進行波 $\psi^\mu_R(\tau-\sigma)$ に分解できる．

閉弦の場合 $X^\mu(\tau,\sigma)$ は $\sigma \to \sigma + 2\pi$ のもとで周期的だが，超対称パートナーのフェルミオンについては，（ψ^μ_L と ψ^μ_R のいずれについても）反周期的・周期的どちらも可能である．反周期境界条件を満たす（世界面上の）フェルミオンを **Neveu–Schwarz (NS) フェルミオン**，周期境界条件を満たすものを **Ramond (R) フェルミオン**と呼ぶ．とくに R フェルミオンは『標的空間のフェルミオン』として振る舞う．さらに，モジュラー不変性*17) が実現するよ

*16) いずれの形式も（少なくとも摂動的には）等価であると考えられている．詳しくは超弦理論の教科書 [58]〜[61] などを見よ．

*17) モジュラー不変性がある場合に超弦理論は摂動展開の各次数で紫外発散が消える．

うにRNSフェルミオンのスペクトルを適当に間引くと[*18)]，スペクトルからタキオンが消え，さらに標的空間に超対称性が現れる（ただしあらわには見えない）．こうして得られる『超対称性のある弦理論』を**超弦理論**という．

(2) Green–Schwarz (GS) 形式：

これは標的空間の超対称性が最初からあらわな形式であるが，κ 対称性というフェルミオン的な局所対称性を余計に持ち込まなくてはならない．この形式では拘束条件を共変的に解くことは難しく，そのため，共変性を保ったまま計算するのは大変難しい．しかしながら，光円錐ゲージのもとでは簡単に解くことができるため，実際に散乱振幅などを計算するには一番便利な形式である．

(3) pure spinor 形式：

上の 2 形式の困難を取り除くべく，近年 Berkovits らにより精力的に研究されている形式である．

さて，超弦理論において Weyl アノマリーが消えるのは標的空間が 10 次元のときであり，このときは，開弦のスペクトルにゼロ質量ベクトル粒子が現れる．ゼロ質量ベクトル粒子について整合性のある唯一の理論は Yang–Mills 理論であるので，結局，開弦理論は，10 次元超対称 Yang–Mills 理論の紫外完全化になっていることになる．一方，やはり同じ 10 次元で，閉弦のスペクトルにはスピン 2 のゼロ質量粒子が現れる．スピン 2 の粒子についての整合性のある唯一の理論は一般相対論であるので，結局，閉弦理論は，10 次元超重力理論（超対称性のある重力理論）の紫外完全化になっていることになる．

6.1.10 II 型超弦理論の有効作用

閉弦のみからなる 10 次元超弦理論では,「左進行波の NS フェルミオンと R フェルミオン」と「右進行波の NS フェルミオンと R フェルミオン」のテンソル積として状態が現れる：

$$(\mathrm{NS} \oplus \mathrm{R}) \otimes (\mathrm{NS} \oplus \mathrm{R})\,. \tag{6.119}$$

とくに，ゼロ質量の物理的状態においては，質量殻上の NS フェルミオンは小群 $SO(8)$ のベクトル表現 $\mathbf{8_v}$ に属し，また，R フェルミオンは（GSO 射影の 2 つのやり方に応じて）スピノール表現 $\mathbf{8_s}$ あるいは共役スピノール表現 $\mathbf{8_c}$ に属す[*19)]．左進行波と右進行波のテンソル積を取る際，左と右で R フェルミオンの 10 次元カイラリティが逆のもの（正確には GSO 射影が逆のもの）を **IIA 型**と呼び，10 次元カイラリティが同じもの（正確には GSO 射影が同じもの）を **IIB 型**と呼ぶ：

*18） **Gliozzi–Scherk–Olive (GSO) 射影**と呼ばれる．

*19） $\mathbf{8_s}$ と $\mathbf{8_c}$ は，もともとの Spin(9,1) の言葉ではそれぞれ 10 次元カイラリティが正と負の状態に対応する．

$$\text{IIA}: \quad (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_s}) \otimes (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_c}), \tag{6.120}$$

$$\text{IIB}: \quad (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_s}) \otimes (\mathbf{8_v} \oplus \mathbf{8_s}). \tag{6.121}$$

これをボソン弦のときと同じ様にして既約分解すれば，次が得られる：

IIA

$$\text{NS-NS}: \quad G_{\mu\nu}\,,\ B_{\mu\nu}\,,\ \Phi\,, \tag{6.122}$$

$$\text{R-R}: \quad C_1\,,\ C_3\,, \tag{6.123}$$

$$\text{NS-R, R-NS}: \quad \chi^{(1)}_{-\,\mu}\,,\ \chi^{(2)}_{+\,\mu}\,,\quad \lambda^{(1)}_{+}\,,\ \lambda^{(2)}_{-}\,, \tag{6.124}$$

IIB

$$\text{NS-NS}: \quad G_{\mu\nu}\,,\ B_{\mu\nu}\,,\ \Phi\,, \tag{6.125}$$

$$\text{R-R}: \quad C_0\,,\ C_2\,,\ C_4\,, \tag{6.126}$$

$$\text{NS-R, R-NS}: \quad \chi^{(1)}_{+\,\mu}\,,\ \chi^{(2)}_{+\,\mu}\,,\quad \lambda^{(1)}_{-}\,,\ \lambda^{(2)}_{-}\,. \tag{6.127}$$

ここで，ボソン弦と同様に，$G_{\mu\nu}(x)$ は重力場，$B_{\mu\nu}(x)$ は 2 階反対称テンソル場，$\Phi(x)$ はディラトン場である．また，**Ramond–Ramond (R-R) ポテンシャル**の $C_{p+1} = (1/(p+1)!)\,C_{\mu_0\cdots\mu_p}\,\mathrm{d}x^{\mu_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_p}$ は $(p+1)$-階反対称テンソル場をまとめて表した $(p+1)$-形式で，Dp ブレーンと直接の相互作用をする（次節参照）．とくに C_4 の場の強さ $\mathrm{d}C_4$ は自己双対 (self dual) である：$*\mathrm{d}C_4 = \mathrm{d}C_4$．また，$\chi_\mu$ は**重力微子**（gravitino: 重力子の超対称パートナーでスピン 3/2 のフェルミオン）の場であり，λ は**ディラティーノ**（dilatino: ディラトンの超対称パートナーでスピン 1/2 のフェルミオン）の場である．添え字の $\pm$ は 10 次元カイラリティを表す：$\Gamma_{11}\,\chi_{\pm\,\mu} = \pm\chi_{\pm\,\mu}$．

前節で行ったボソン弦に対する有効作用の導出は，超対称性を援用しながら超弦理論に対しても行うことができ，**超弦理論の有効作用**を得ることができる．R-R ポテンシャル C_{p+1} の場の強さを $F_{p+2} = \mathrm{d}C_{p+1}$ と書けば，10 次元 IIA 型超弦理論の有効作用のボソン部分は次で与えられる [59]：

$$S_{\text{IIA}} = S_{\text{NS}} + S_{\text{R}} + S_{\text{CS}}\,, \tag{6.128}$$

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G}\ \mathrm{e}^{-2\Phi}\left[R + 4\,\partial_\mu\Phi\,\nabla^\mu\Phi - \frac{1}{2}\,|H_3|^2 + \mathcal{O}(\alpha')\right], \tag{6.129}$$

$$S_{\text{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G}\,\left[|F_2|^2 + |\tilde{F}_4|^2 + \mathcal{O}(\alpha')\right], \tag{6.130}$$

$$S_{\text{CS}} = \frac{1}{4\kappa_{10}^2} \int \left[B_2 \wedge F_4 \wedge F_4 + \mathcal{O}(\alpha')\right]. \tag{6.131}$$

ここで，$H_3 = \mathrm{d}B_2$，$\tilde{F}_4 \equiv F_4 - C_1 \wedge F_3$ であり，n-形式 $\Omega_n =$

$(1/n!)\,\Omega_{\mu_1\cdots\mu_n}\,\mathrm{d}x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_n}$ に対して，$|\Omega_n|^2 \equiv (1/n!)\,\Omega^{\mu_1\cdots\mu_n}\Omega_{\mu_1\cdots\mu_n}$ とした．

一方，10 次元 IIB 型超弦理論に対する有効作用のボソン部分は，次で与えられる：

$$S_{\mathrm{IIB}} = S_{\mathrm{NS}} + S_{\mathrm{R}} + S_{\mathrm{CS}}\,, \tag{6.132}$$

$$S_{\mathrm{NS}} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G}\;\mathrm{e}^{-2\Phi}\left[R + 4\,\partial_\mu\Phi\,\nabla^\mu\Phi - \frac{1}{2}\,|H_3|^2 + \mathcal{O}(\alpha')\right], \tag{6.133}$$

$$S_{\mathrm{R}} = -\frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int \mathrm{d}^{10}x\,\sqrt{-G}\left[|F_1|^2 + |\tilde{F}_3|^2 + \frac{1}{2}\,|\tilde{F}_5|^2 + \mathcal{O}(\alpha')\right], \tag{6.134}$$

$$S_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{4\kappa_{10}^2}\int \left[C_4\wedge H_3\wedge F_3 + \mathcal{O}(\alpha')\right]. \tag{6.135}$$

ここで，$\tilde{F}_3 \equiv F_3 - C_0\wedge H_3$，$\tilde{F}_5 \equiv F_5 - (1/2)\,C_2\wedge H_3 + (1/2)\,B_2\wedge F_3$ であり，さらに，$\tilde{F}_5$ は自己双対な 5-形式である：$*\tilde{F}_5 = \tilde{F}_5$ *20)．10 次元 Newton 定数 G_{10} と κ_{10} は，次で定義される*21)：

$$2\kappa_{10}^2 = 16\pi G_{10}\,,\quad G_{10} = 8\pi^6 g_s^2\,\ell_s^8\,. \tag{6.136}$$

6.2 Dp ブレーンがあるときの有効作用

6.2.1 荷電粒子のときの復習

本節では，Dp ブレーンがあるときの有効作用を考える．そのため，まず，4 次元 Minkowski 時空における質量 m，電荷 q の荷電粒子の運動を考えよう．登場する変数は

- 4 次元時空全体 (bulk) で定義された場：$A_\mu(x)$,
- 粒子の軌跡 (path) を記述する関数：$X^\mu(\tau)$

の 2 種類であり，作用汎関数 $S = S[A_\mu(x), X^\mu(\tau)]$ は次で与えられる：

$$\begin{aligned} S &= S_{\mathrm{bulk}} + S_{\mathrm{int}} + S_{\mathrm{path}} \\ &= \int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}^2(x)\right] + q\int \mathrm{d}\tau\,A_\mu\big(X(\tau)\big)\,\dot{X}^\mu(\tau) \\ &\quad - m\int \mathrm{d}\tau\,\sqrt{-\dot{X}_\mu^2(\tau)}\,. \end{aligned} \tag{6.137}$$

---

*20) この自己双対性の条件は作用から運動方程式を求めた後に課すことにする．実は，F_p $(p = 1,\ldots,5)$ の双対形式 $(*F)_{10-p}$ を初めから独立なものとして用意しておくと，T-duality で移りあうことが明白であるように IIA 型と IIB 型の有効作用を書き直すことができる [67]．この定式化 (democratic formulation) に関する最近の進展については [68] を見よ．

*21) 以下，ディラトン場の期待値からの寄与は κ_{10}^2 の中にくりこむこととし，$\langle\Phi(X)\rangle = 0$ と置く．

これらの系が重力場 $g_{\mu\nu}(x)$ と結合している場合，全体の作用 $S = S[g_{\mu\nu}(x), A_\mu(x), X^\mu(\tau)]$ は，上記のものに Einstein–Hilbert 作用を付け加えて，

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{int}} + S_{\text{path}} \,, \tag{6.138}$$

$$S_{\text{bulk}} = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa_4^2} R - \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \right] , \tag{6.139}$$

$$S_{\text{int}} = q \int \mathrm{d}\tau \, A_\mu(X) \, \dot{X}^\mu \,, \tag{6.140}$$

$$S_{\text{path}} = -m \int \mathrm{d}\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}(X) \, \dot{X}^\mu \, \dot{X}^\nu} \tag{6.141}$$

となる．

6.2.2 II 型超弦理論における Dp ブレーンの有効理論

次に 10 次元 II 型超弦理論における Dp ブレーンを考える．粒子の軌跡（世界線）を記述するには 1 つのパラメーター τ だけあれば良かったが，Dp ブレーンの軌跡である**世界体積** (world volume) を記述するには，$p+1$ 個のパラメーター $\xi = (\xi^a)$ $(a = 0, 1, \ldots, p)$ が必要であることに注意しておく．今回登場するのは次の場である*22)：

- 10 次元時空全体 (bulk) で定義された場：$G_{\mu\nu}(x)$, $B_{\mu\nu}(x)$, $\Phi(x)$, $C_{p+1}(x)$,
- ブレーンの軌跡を記述する関数：$X^\mu(\xi)$,
- ブレーン上のゲージ場：$A_a(\xi)$.

以上の変数に対し，作用汎関数は次で与えられる：

$$S = S_{\text{bulk}} + S_{\text{int}} + S_{\text{DBI}} \,. \tag{6.142}$$

第 1 項目の S_{bulk} は前節で述べた 10 次元 II 型超重力理論の作用である：

$$S_{\text{bulk}} = S_{\text{IIA/IIB}} \,. \tag{6.143}$$

第 2 項目の S_{int} は，荷電粒子がゲージ場と結合するときの相互作用を Dp ブレーンの場合に一般化したものである：

$$S_{\text{int}} = \mu_p \int \mathrm{d}^{p+1}\xi \, \frac{1}{(p+1)!} \, C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}(X(\xi)) \\ \times \epsilon^{a_1 \cdots a_{p+1}} \, \partial_{a_1} X^{\mu_1}(\xi) \cdots \partial_{a_{p+1}} X^{\mu_{p+1}}(\xi) \,. \tag{6.144}$$

Dp ブレーン電荷 μ_p は次で与えられることが知られている：

$$\mu_p = \frac{1}{(2\pi)^p \, \ell_s^{p+1}} \,. \tag{6.145}$$

---

*22) ブレーン上に誘起されるスカラー場 Φ_m $(m = p+1, \ldots, 9)$（10 次元ベクトル場のうちブレーンと直交する $9-p$ 成分）については省略する．より一般の場合については，[60] を見よ．

第 3 項目の $S_{\rm DBI}$ は

$$S_{\rm DBI} = -T_{{\rm D}p} \int {\rm d}^{p+1}\xi\ {\rm e}^{-\Phi(X(\xi))} \sqrt{-\det\big(\gamma_{ab} + b_{ab} + 2\pi\alpha'\, F_{ab}\big)(\xi)} \tag{6.146}$$

で与えられる．ここで，

$$\gamma_{ab}(\xi) \equiv G_{\mu\nu}(X(\xi))\, \partial_a X^\mu(\xi)\, \partial_b X^\nu(\xi)\,, \tag{6.147}$$

$$b_{ab}(\xi) \equiv B_{\mu\nu}(X(\xi))\, \partial_a X^\mu(\xi)\, \partial_b X^\nu(\xi)\,, \tag{6.148}$$

$$A_a(\xi) \equiv A_\mu(X(\xi))\, \partial_a X^\mu(\xi)\,, \tag{6.149}$$

$$F_{ab}(\xi) \equiv \partial_a A_b(\xi) - \partial_b A_a(\xi) \tag{6.150}$$

である．$\gamma_{ab}(\xi)$ は，10 次元時空に埋め込まれた Dp ブレーン上の誘導計量であるので，$S_{\rm DBI}$ の非積分関数は，本質的に，Dp ブレーンの世界体積の体積を表している．ブレーンの張力 $T_{{\rm D}p}$ は次で与えられることが知られている：

$$T_{{\rm D}p} = \frac{1}{g_s\,(2\pi)^p\, \ell_s^{p+1}}\,. \tag{6.151}$$

この作用 $S_{\rm DBI}$ を **Dirac–Born–Infeld (DBI) 作用**と呼ぶ．

$S_{\rm DBI}$ には，3 つの場 γ_{ab}, b_{ab}, F_{ab} が $\gamma_{ab} + b_{ab} + 2\pi\alpha'\, F_{ab}$ の組み合わせで現れるが，その理由を簡単に説明しておく．まず，弦の世界面 Σ に境界がある場合の NLσ 模型作用が

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{4\pi\alpha'} &\int_\Sigma {\rm d}\tau\, {\rm d}\sigma \left[(-\sqrt{-h}h^{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta})\,(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu})\,\partial_\alpha X^\mu\, \partial_\beta X^\nu\right] \\ &+ \int_{\partial\Sigma} {\rm d}\tau\, A_\mu\, \partial_\tau X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} \end{aligned} \tag{6.152}$$

と書けることから，γ_{ab} と b_{ab} が $\gamma_{ab} + b_{ab}$ の組み合わせで現れることは自然である*23)．一方，$B_{\mu\nu}$ と A_μ を含む部分を微分形式で書けば

$$\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma B_2 + \int_{\partial\Sigma} A_1 = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma \big(B_2 + 2\pi\alpha'\, F_2\big) \tag{6.153}$$

となり ($F_2 = {\rm d}A_1$)，このことから，$B_{\mu\nu}$ と A_μ は常に $B_{\mu\nu} + 2\pi\alpha'\, F_{\mu\nu}$ の形で現れることが分かる．なお，この組み合わせ $B_2 + 2\pi\alpha'\, F_2$ は，1 形式 Λ_1 による次のゲージ変換のもとで不変である：

$$B_2 \to B_2' = B_2 + {\rm d}\Lambda_1\,, \tag{6.154}$$

$$A_1 \to A_1' = A_1 - \frac{1}{2\pi\alpha'}\, \Lambda_1\,. \tag{6.155}$$

---

*23) この組み合わせは，トーラスなどにコンパクト化した際の T-duality 変換のもとでの変換性からも理解できる．

6.3 Dp ブレーン解

本節では，前節で与えた有効作用の古典解について解説する．具体的な導出については，[61] あるいはそこで挙げられている原論文を見よ．

6.3.1 基本形：Dp ブレーン解

10 次元座標を x^μ $(\mu = 0, 1, \ldots, 9)$ とする．今，Q_p 枚の Dp ブレーンを次のように配置したとする：

0	1	2	$\cdots$	p	$p+1$	$\cdots$	9
◯	◯	◯	$\cdots$	◯	–	$\cdots$	–

ここで，◯ はブレーンの拡がる方向，– はブレーンに垂直な方向を表す．

このときは 10 次元 II 型超重力が持っていた超対称性が半分残り，ストリングフレームでの古典解は次で与えられる：

$$\mathrm{d}s_{10}^2 = H_p^{-1/2}(r)\left[-\mathrm{d}t^2 + \sum_{a=1}^{p} \mathrm{d}y_a^2\right] + H^{1/2}(r) \sum_{i=p+1}^{9} \mathrm{d}x_i^2\,, \tag{6.156}$$

$$\mathrm{e}^{-2\Phi(r)} = \left[H_p(r)\right]^{(p-3)/2}, \tag{6.157}$$

$$C_{01\cdots p}(r) = \frac{1}{2}\left[1 - H_p^{-1}(r)\right]. \tag{6.158}$$

ここで，見やすくするため，ブレーンに沿った方向の座標は x ではなく y を用いた．また，r はブレーンからの垂直距離を表し $\left(r^2 \equiv \sum_{i=p+1}^{9} x_i^2\right)$，$H_p(r)$ は垂直な $9-p$ 次元空間の調和関数である：

$$H(r) = 1 + \left(\frac{r_p}{r}\right)^{7-p} \quad \left[\sum_{i=p+1}^{9} \partial_{x_i}^2 H(r) \propto \delta^{9-p}(x)\right]. \tag{6.159}$$

r_p^{7-p} は Q_p に比例した定数で，次で与えられる：

$$r_p^{7-p} = (4\pi)^{\frac{5-p}{2}}\,\Gamma\!\left(\frac{7-p}{2}\right) g_s Q_p\, \ell_s^{7-p}\,. \tag{6.160}$$

以上の解は超弦理論の有効作用を解いて得られた解であるが，この有効作用が適用できるのは，(1) 閉弦のループ効果が効かず，(2) エネルギースケールがストリングスケール $1/\ell_s$ に比べて十分低く，微分展開の初項だけ考えればよいときである．(1) は $g_s \ll 1$ を意味し，また，(2) は $r_p \gg \ell_s$ を意味し，これは $g_s Q_p \gg 1$ と等価である．一方で，Dp ブレーン上の有効理論として同じ系を扱えば，$g_s Q_p$ は開弦のループ展開における展開パラメーターになっている*24)．従って，ブレーン上の低エネルギー有効理論は，強結合領域の Yang–Mill 理論になっている．

*24) 各ループに対して Chan–Paton 因子の和が伴うことより，Q_p が入る．

6.3.2 Dp–Dp' ブレーン解

Dp ブレーンを Dp' ブレーン ($p < p'$) の中に一様に分布させることを考える．実は，$p - p' \equiv 0 \pmod 4$ のときには，超対称性が 1/4 残り，安定な系として存在できることが知られている．例えば，次のように，Q_1 枚の D1 ブレーンを Q_5 枚の D5 ブレーンの中に一様分布させてみる：

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	–	–	–	–	○	○	○	○	○
D1	○	–	–	–	–	*	*	*	*	○

ここで，* はその方向に D1 ブレーンが一様分布させられていることを表す．このときの古典解は次で与えられる[*25)]：

$$\begin{aligned} ds_{10}^2 &= (H_1 H_5)^{-1/2}\left(-dt^2 + dy_9^2\right) + (H_1 H_5)^{1/2}\left(dx_1^2 + \cdots + dx_4^2\right) \\ &\quad + (H_1/H_5)^{1/2}\left(dy_5^2 + \cdots + dy_8^2\right), \end{aligned} \tag{6.161}$$

$$e^{-2\Phi} = H_5\, H_1^{-1}, \tag{6.162}$$

$$C_{09} = \frac{1}{2}\left(1 - H_1^{-1}\right), \tag{6.163}$$

$$C_{056789} = \frac{1}{2}\left(1 - H_5^{-1}\right), \tag{6.164}$$

$$H_a = 1 + \frac{r_a^2}{r^2} \quad (a = 1, 5). \tag{6.165}$$

ただし，$r^2 = x_1^2 + \cdots + x_4^2$ である．上の式より，D1 と D5 が両方あるとき，それぞれが独立に前小節の規則に従って寄与していることが分かる．

ここで，一つ重要な注意をしておく．もし，D1 ブレーンを一様分布させず，例えば $x_1 = \cdots = x_4 = y_5 = \cdots = y_8 = 0$ に置いていたとすれば，対応する調和関数は空間 8 次元の調和関数 $\tilde{H}_1(R) = (R_1/R)^6 +$ 定数 $\left(R^2 = r^2 + y^2;\, y^2 = y_5^2 + \cdots + y_8^2\right)$ となっていたはずである．しかしながら，今は D1 ブレーンを y_5 から y_8 方向に一様に分布させているため，得られる調和関数の r 依存性は次のようになる：

$$\int d^4y\, \frac{\text{定数}}{R^6} = \int d^4y\, \frac{\text{定数}}{\left(\sqrt{r^2 + y^2}\right)^6} = \frac{r_1^2}{r^2}. \tag{6.166}$$

なお，一様分布させたことにより，r_1 の値は (6.160) のものとは異なる．

6.3.3 D1–D5–P 解

前節の系において，D1 の方向に運動量を持たせても超対称性が半分残る（合

---

*25) 双対性の条件 $dC_2 = * dC_6$ より，(6.164) 式は次と等価である：

$$F_{ijk} = (dC_2)_{ijk} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijkl}\,\partial_l H_5(r).$$

従って，1–4 方向を $\mathbb{R}_+ \times S^3 = \{(r, \Omega_3)\}$ と極座標表示して，$dx_1^2 + \cdots dx_4^2 = dr^2 + r^2\, d\Omega_3^2$ と書けば，上で与えた F_{ijk} は S^3 方向に成分を持っていることが分かる．

計で超対称性は $(1/2)^3 = 1/8$ まで減っている）．これを

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	−	−	−	−	○	○	○	○	○
D1	○	−	−	−	−	*	*	*	*	○
P	○	−	−	−	−	−	−	−	−	○

と表すことにする．このときの古典解は次で与えられる：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s_{10}^2 &= (H_1H_5)^{-1/2}\left[-\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}y_9^2+\frac{r_P^2}{r^2}\left(\mathrm{d}y_9-\mathrm{d}t\right)^2\right]\\
&\quad+(H_1H_5)^{1/2}\left(\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_4^2\right)\\
&\quad+(H_1/H_5)^{1/2}\left(\mathrm{d}y_5^2+\cdots+\mathrm{d}y_8^2\right),\\
&= (H_1H_5)^{-1/2}\left[-H_P^{-1}\,\mathrm{d}t^2+H_P\left(\mathrm{d}y_9-(1-H_P^{-1})\,\mathrm{d}t\right)^2\right]\\
&\quad+(H_1H_5)^{1/2}\left(\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_4^2\right)\\
&\quad+(H_1/H_5)^{1/2}\left(\mathrm{d}y_5^2+\cdots+\mathrm{d}y_8^2\right),
\end{aligned} \tag{6.167}
$$

$$
\mathrm{e}^{-2\Phi} = H_5\,H_1^{-1}, \tag{6.168}
$$

$$
C_{09} = \frac{1}{2}\left(1-H_1^{-1}\right), \tag{6.169}
$$

$$
C_{056789} = \frac{1}{2}\left(1-H_5^{-1}\right), \tag{6.170}
$$

$$
H_a = 1+\frac{r_a^2}{r^2}\quad (a=1,5,P). \tag{6.171}
$$

(6.167) 式の g_{09} 成分を見ることにより，この系は r_P^2 に比例した運動量を持っていることが分かる．

6.4 ブラックホールエントロピーの微視的計算

本節では，ある種の極大ブラックホールについて，そのエントロピーが弦理論から微視的に導出できることを解説する．考えるのは，前節で述べた D1–D5–P 系である．まず，6.4.1 節で極大ブラックホールの復習をした後，6.4.2 節で D1–D5–P 系の Bekenstein–Hawking エントロピーを計算する．次の 6.4.3 節で微視的な計算を行い，両者が確かに一致することを示す．

6.4.1 極大ブラックホール

まず，ウォームアップとして，4 次元の Reissner–Nordström (RN) 解を考えよう．これは，重力場と電磁場が結合した Einstein–Maxwell 系

$$
S = \int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{1}{16\pi G_4}\,R-\frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}^2\right] \tag{6.172}
$$

におけるブラックホール解である［(1.247) で $J=0$ $(a=0)$ としたもの］：

$$\mathrm{d}s_4^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = -\frac{\Delta(\rho)}{\rho^2}\,\mathrm{d}t^2 + \frac{\rho^2}{\Delta(\rho)}\,\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2$$

$$\left[\,\Delta(\rho) = \rho^2 - 2G_4 M\,\rho + G_4\,(Q/4\pi)^2\,\right], \tag{6.173}$$

$$A = A_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = -\frac{Q}{4\pi\rho}\,\mathrm{d}t\,. \tag{6.174}$$

ここで M と Q はブラックホールの質量と電荷である．特異点 $\rho = 0$ がホライズンに隠れているためには，関数 $\Delta(\rho)$ が実根を持つ必要があり，そのために，電荷 Q の取りうる範囲には制限が付く：

$$\left(\frac{Q}{4\pi}\right)^2 \leq G_4\,M^2\,. \tag{6.175}$$

これを**BPS 限界**という．2 つの解を ρ_+, ρ_- $(\rho_- \leq \rho_+)$ とすれば，(5.8) の表面重力で $a = 0$ と置いたものを用いて，Hawking 温度は

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\rho_+ - \rho_-}{4\pi\rho_+^2} \tag{6.176}$$

と求まる．ホライズンは $\rho = \rho_+$ で与えられ，Bekenstein–Hawking エントロピーは

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{\text{面積}}{4G_4} = \frac{\pi\rho_+^2}{G_4} \tag{6.177}$$

である．

電荷 Q がとくに上限値を取る場合は $\left[(Q/4\pi)^2 = G_4 M^2\right]$，$\Delta(\rho) = 0$ の 2 根は一致し $\left[\rho_+ = \rho_- = G_4 M\right]$，このブラックホール解を極大ブラックホール解と呼ぶ．計量は

$$\mathrm{d}s_4^2 = -\left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)^2 \mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right)^{-2} \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2 \quad (\rho_+ = G_4 M) \tag{6.178}$$

である．このとき，Hawking 温度はゼロになるが，ホライズンは引き続き有限の面積を持つため，Bekenstein–Hawking エントロピーはゼロでない値を持つ：

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{\text{面積}}{4G_4} = \frac{\pi\rho_+^2}{G_4} \quad (\text{極大 RN})\,. \tag{6.179}$$

なお，この極大ブラックホール解には超対称性があることが知られている．

次節で考察するブレーン解と比較するためには，変数変換

$$r \equiv \rho - \rho_+ \quad (r \geq 0) \tag{6.180}$$

を行い，

$$\mathrm{d}s_4^2 = -\left(1 + \frac{\rho_+}{r}\right)^{-2} \mathrm{d}t^2 + \left(1 + \frac{\rho_+}{r}\right)^2 \left(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2\right) \tag{6.181}$$

と書き直すのが便利である．このとき，ホライズン $(r = 0)$ 近傍の幾何は

$$\mathrm{d}s_4^2 \simeq -\left(\frac{\rho_+}{r}\right)^{-2} \mathrm{d}t^2 + \left(\frac{\rho_+}{r}\right)^2 \left(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2\right) \tag{6.182}$$

となり，$\mathrm{AdS}_2 \times S^2$ となることが分かる．また，ホライズンが有限の半径 ρ_+ の 2 次元球面となることも分かる．

5 次元球対称な極大 RN 解も同様に構成することができ，

$$\mathrm{d}s_5^2 = -\left[1 - \left(\frac{\rho_+}{\rho}\right)^2\right]^2 \mathrm{d}t^2 + \left[1 - \left(\frac{\rho_+}{\rho}\right)^2\right]^{-2} \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\Omega_3^2 \tag{6.183}$$

となる．これは座標変換

$$r = \sqrt{\rho^2 - \rho_+^2} \quad (r \geq 0) \tag{6.184}$$

を行うことで

$$\mathrm{d}s_5^2 = -\left[1 + \left(\frac{\rho_+}{r}\right)^2\right]^{-2} \mathrm{d}t^2 + \left[1 + \left(\frac{\rho_+}{r}\right)^2\right] \left(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_3^2\right) \tag{6.185}$$

と書き直せる．このときもホライズン $(r = 0)$ は有限の半径 ρ_+ を持つため，有限のエントロピーを持っていることが分かる．一般の d 次元の極大 RN 解は

$$\mathrm{d}s_d^2 = \cdots + \left[1 + \left(\frac{\rho_+}{r}\right)^{d-3}\right]^{\frac{2}{d-3}} \left(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_{d-2}^2\right) \tag{6.186}$$

であり，やはりホライズン $r = 0$ で有限の半径を持つ．

6.4.2 D1–D5–P 系の Bekenstein–Hawking エントロピー

超対称な極大ブラックホールを D ブレーンを用いて実現してみよう．前節で述べたように，複数種類の D ブレーンを上手く導入することで，複数の電荷 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ を持つブレーン解を構成することができる．次節で具体的に構成するが，5 次元 Einstein フレームにおける計量は一般に

$$\mathrm{d}s_{5,\mathrm{E}}^2 = -\lambda^{-\frac{2}{3}}(r)\,\mathrm{d}t^2 + \lambda^{\frac{1}{3}}(r)\left(\mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Omega_3^2\right) \tag{6.187}$$

の形を持つ．ここで，$\lambda(r)$ は，電荷の種類に応じた調和関数をかけたものである：

$$\lambda(r) = \prod_{a=1}^{n} \left[1 + \left(\frac{r_a}{r}\right)^2\right]. \tag{6.188}$$

すると，ホライズン $(r = 0)$ 近傍での計量は

$$\mathrm{d}s_{5,\mathrm{E}}^2 \simeq \cdots + \left(\prod_a r_a^{2/3}\right) r^{2-2n/3}\,\mathrm{d}\Omega_3^2 \tag{6.189}$$

となるため，ホライズンが有限の面積を持つためには（つまり有限の Bekenstein–Hawking エントロピーを持つためには），$n = 3$，つまり 3 種類の電荷が必要であることが分かる*26)． 前節で述べた D1–D5–P 系はちょうど 3 種類の電荷を

*26) 同様の解析により，4 次元では 4 種類の電荷が必要であることが容易に確かめられる．

もっているので，これを用いれば有限エントロピーの 5 次元極大ブラックホールが構成できることが期待される．

まず，前節と同様にして，Q_1 枚の D1 ブレーンを Q_5 枚の D5 ブレーンの中に一様分布させ，D1 ブレーンの方向に運動量を与える．今回はさらに，D5 ブレーンがある方向 y_α ($\alpha = 5, \ldots, 9$) をそれぞれ半径 R_α ($\alpha = 5, \ldots, 9$) の円にコンパクト化する．つまり，D5 は 5 次元トーラス T^5 に巻きつき，D1 はその中の円 S^1 に巻きついている．y_9 方向に与えた運動量は $1/R_9$ の単位で量子化される．この運動量は，[T^5 に垂直なノンコンパクト 5 次元 x^μ ($\mu = 0, 1, \ldots, 4$) の立場で] **Kaluza–Klein 運動量**と呼ばれる．

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D5	○	–	–	–	–	○	○	○	○	○
D1	○	–	–	–	–	*	*	*	*	○
P	○	–	–	–	–	–	–	–	–	○

コンパクト化した後の 5 次元理論は次のようにして決定される．まず，10 次元の有効作用*27)

$$S_{10} = \frac{1}{16\pi G_{10}} \int \mathrm{d}^5x\, \mathrm{d}^5y \sqrt{-g_{10}}\; \mathrm{e}^{-2\phi_{10}} \left[R_{10} + \cdots\right] \tag{6.190}$$

に現れる場に対し，コンパクト化した方向（y 方向）への依存性を無視することで 5 次元の有効作用

$$S_5 = \frac{1}{16\pi G_5} \int \mathrm{d}^5x \sqrt{-g_5}\; \mathrm{e}^{-2\phi_5} \left[R_5 + \cdots\right] \tag{6.191}$$

が得られることに注意する．従って，次の関係が成立する：

$$\frac{1}{G_5} = \frac{(2\pi)^5\, R_{5678}\, R_9}{G_{10}}\,, \tag{6.192}$$

$$\sqrt{-g_5}\; \mathrm{e}^{-2\phi_5} = \sqrt{-g_{10}}\; \mathrm{e}^{-2\phi_{10}}\ . \tag{6.193}$$

ここで，後の表式を簡単にするために，記号 $R_{5678} \equiv R_5 R_6 R_7 R_8$ を導入した．また，5 次元における（ストリングフレームでの）計量は，

$$\mathrm{d}s^2_{5,\mathrm{str}} = -\left(H_1 H_5\right)^{-\frac{1}{2}} H_P^{-1}\, \mathrm{d}t^2 + \left(H_1 H_5\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_4^2\right) \tag{6.194}$$

と書ける．こうして，(6.167) 式より，

$$\sqrt{-g_{10}} = \sqrt{-g_5}\, H_1^{\frac{3}{4}}\, H_5^{-\frac{5}{4}}\, H_P^{\frac{1}{2}} \tag{6.195}$$

となるので，

---

*27) 以下 10 次元の場 $G_{\mu\nu}, \Phi, \ldots$ を $g_{10,\mu\nu}, \phi_{10}, \ldots$ などと書くことにする．G_d は d 次元の Newton 定数である．

$$\mathrm{e}^{-2\phi_5} = H_1^{\frac{3}{4}} H_5^{-\frac{5}{4}} H_P^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-2\phi_{10}} = \big(H_1 H_5\big)^{-\frac{1}{4}} H_P^{\frac{1}{2}} \tag{6.196}$$

となることが分かる．最後の等式では (6.168) 式を用いた．ストリングフレームから Einstein フレームに移れば，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{5,\mathrm{E}}^2 &= \mathrm{e}^{-\frac{4}{3}\phi_5} \, \mathrm{d}s_{5,\mathrm{str}}^2 \\ &= -\big(H_1 H_5 H_P\big)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{d}t^2 + \big(H_1 H_5 H_P\big)^{\frac{1}{3}} \left(\mathrm{d}r^2 + r^2 \, \mathrm{d}\Omega_3^2\right) \end{aligned} \tag{6.197}$$

となり，これはまさに (6.187) の形になっている．

$r \to 0$ における漸近形

$$\big(H_1 H_5 H_P\big)^{\frac{1}{3}} \simeq \frac{(r_1^2 r_5^2 r_P^2)^{1/3}}{r^2} \tag{6.198}$$

より，この計量は確かにホライズン $r = 0$ において有限の半径 $(r_1^2 r_5^2 r_P^2)^{1/6}$ を持ち，Bekenstein–Hawking エントロピーは

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{\sqrt{r_1^2 r_5^2 r_P^2}\,\Omega_3}{4G_5} = \frac{\pi^2}{2G_5} \sqrt{r_1^2 r_5^2 r_P^2} \qquad (\Omega_3 = 2\pi^2) \tag{6.199}$$

で与えられる．

一方，$r \to \infty$ における漸近形

$$g_{00} = -\big(H_1 H_5 H_P\big)^{-\frac{2}{3}} \simeq -1 + \frac{2}{3} \frac{r_1^2 + r_5^2 + r_P^2}{r^2} \tag{6.200}$$

より，ADM 質量 M は，関係式

$$\frac{2}{3} \left(r_1^2 + r_5^2 + r_P^2\right) \equiv \frac{16\pi M G_5}{3\Omega_3} = \frac{8 G_5 M}{3\pi} \tag{6.201}$$

を用いて，

$$M = \frac{\pi}{4G_5} \left(r_1^2 + r_5^2 + r_P^2\right) \, \big(\equiv M_1 + M_5 + M_P\big) \tag{6.202}$$

と求まる．この表式は，ADM 質量が，D1 の張力エネルギー (M_1)，D5 の張力エネルギー (M_5)，Kaluza–Klein 質量 (M_P) の単純和として書けることを表している．今，D1 と D5 は有限体積のトーラスに巻きついているので，そのエネルギー（= 体積 × 張力 × 枚数）は有限値を持ち，次のように計算される：

$$M_1 = 2\pi R_9 \, T_{\mathrm{D1}} \, Q_1 = \frac{R_9}{g_s \ell_s^2} \, Q_1 \, , \tag{6.203}$$

$$M_5 = (2\pi)^5 R_{5678} R_9 \, T_{\mathrm{D5}} \, Q_5 = \frac{R_{5678} R_9}{g_s \ell_s^6} \, Q_5 \, . \tag{6.204}$$

また，Q_P 番目のモードの Kaluza–Klein 運動量からの寄与は

$$M_P = \frac{Q_P}{R_9} \tag{6.205}$$

となる[*28]．以上のことと，

*28) 正しくは運動量 Q_P/R_9 に対してエネルギーは $|Q_P|/R_9$ である．以下 $Q_P > 0$ であるとする．

$$\frac{1}{G_5}=\frac{(2\pi)^5R_{5678}R_9}{G_{10}}=\frac{4R_{5678}R_9}{\pi g_s^2\ell_s^8} \tag{6.206}$$

を組み合わせれば,

$$r_1^2=\frac{4G_5}{\pi}M_1=\frac{g_s\ell_s^6}{R_{5678}}Q_1\,, \tag{6.207}$$

$$r_5^2=\frac{4G_5}{\pi}M_5=g_s\ell_s^2Q_5\,, \tag{6.208}$$

$$r_P^2=\frac{4G_5}{\pi}M_P=\frac{g_s^2\ell_s^8}{R_{5678}R_9^2}Q_P \tag{6.209}$$

を得る．これから，Bekenstein–Hawking エントロピーは，電荷 Q_1, Q_5, Q_P を用いて,

$$S_{\rm BH}=\frac{\pi^2}{2G_5}\sqrt{r_1^2r_5^2r_P^2}=2\pi\sqrt{Q_1Q_5Q_P} \tag{6.210}$$

と求まる．

ここで，上記の計算がどのようなときに正当化されるのかをもう一度整理しておこう．まず，古典超重力理論を用いた近似がよいのは，(1) 弦のループ効果が効かず，(2) エネルギースケールがストリングスケール $1/\ell_s$ に比べて十分低く，微分展開の初項だけ考えればよいときである．(1) は $g_s \ll 1$ を意味し，また，(2) は $r_a^2 \gg \ell_s^2$ $(a=1,5,P)$ を意味し，次と等価である：

$$g_sQ_1\gg\frac{R_{5678}}{\ell_s^4}\,,\quad g_sQ_5\gg1\,,\quad g_s^2Q_P\gg\frac{R_{5678}R_9^2}{\ell_s^6}\,. \tag{6.211}$$

今，コンパクト化の半径 R_α $(\alpha=5,\dots,9)$ がすべて ℓ_s と同程度であると仮定すれば，結局，上記の計算結果がよい近似となっているのは,

$$g_s\ll1\,,\quad g_sQ_1\gg1\,,\quad g_sQ_5\gg1\,,\quad g_s^2Q_P\gg1 \tag{6.212}$$

のときであると分かる．

6.4.3 D1–D5–P 系のエントロピーの微視的導出

前小節のエントロピー (6.210) を微視的状態数を数えることによって再現してみよう*29)．今の系は極大ブラックホールで温度が 0 であるため，数えるのは基底状態の数である．

以下，y_9 方向の半径が他のものに比べ十分長い場合を考える：$R_9 \gg R_i$ $(i=5,6,7,8)$．上の例では

$$g_s\ll1\,,\quad g_sQ_1\gg1\,,\quad g_sQ_5\gg1 \tag{6.213}$$

が成り立っているため，この系では重力の効果が無視でき (decoupling)，低エ

*29) このような計算を最初に遂行したのは [69] の論文である．その後，[70], [71] で D1–D5–P 系に対する計算が行われた．

ネルギーでの有効理論は実質 D1 ブレーン上の強結合の 2 次元の場の理論となる．その有効場は D1 の変形に対するモジュライであるが，詳しい解析によると D1 が D5 内に留まる変形だけがゼロ質量励起になり，それは，全部で y_5 から y_8 までの 4 方向ある*30)．また，今は超対称性が残っているので，同じ数のフェルミオン的自由度があるはずである．こうして，この系に対する有効理論は，$N_B = 4$ 個のゼロ質量実スカラーと $N_F = 4$ 個のゼロ質量 Majorana フェルミオンからなる $(1+1)$ 次元共形場理論となることが分かる．ただし，y_9 方向の運動量が Q_P/R_9 であるという制約がある．

さて，この有効理論の微視的自由度はもちろん開弦であり，上の変形に対応する自由度は，開弦の端点の片方が D1 に乗り他方が D5 に乗っているような，開弦の第 1 励起状態である．この D1 と D5 の配位について，もう少し詳しく見てみよう．

今，5 次元トーラスに巻きついた D5 ブレーンの中に D1 ブレーンが一様に埋め込まれているが，D5 電荷 Q_5 と D1 電荷 Q_1 を実現する配位としては，様々なものがある．例えば D1 については，y_9 方向の S^1 に対し，Q_1 個の D1 が 1 回だけ巻きついたものから，1 個の D1 が Q_1 回巻きついたものまで，Q_1 の分割数分の配位がある．

まず一番簡単な配位として，1 個の D1 と 1 個の D5 が，それぞれ，y_9 方向の S^1 に Q_1 回と Q_5 回巻きついている場合を考えてみよう．今 Q_1 と Q_5 は十分に大きいため，互いに素であるとしてよい．すると，開弦の重心は S^1 を Q_1Q_5 回巻きついて初めて元の状態に戻る．このことは，$Q_1 = 2$, $Q_5 = 3$ の場合を考えてみるとすぐ分かる．実際，開弦の一端が D1 の何回目のループにいるかを $1, 2$，他端が D5 の何回目のループにいるかを $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ とラベルすることにすれば，最初 $(1, \bar{1})$ の開弦の状態は，S^1 を周回するにつれ，$(1,\bar{1}) \xrightarrow{1} (2,\bar{2}) \xrightarrow{2} (1,\bar{3}) \xrightarrow{3} (2,\bar{1}) \xrightarrow{4} (1,\bar{2}) \xrightarrow{5} (2,\bar{3}) \xrightarrow{6} (1,\bar{1})$ と，$2 \times 3 = 6$ 回まわって初めて元の配置に戻る．こうして，開弦の端点が乗っている D1 は，実質的に長さが $2\pi Q_1 Q_5 R_9$ の円となる．こうして，今考えるべき共形場理論は，半径 $R \equiv Q_1 Q_5 R_9$ の円上で定義されたものになる．

$i = 5, 6, 7, 8$ 方向の実スカラー場 $\phi_i(t, y)$ $(y = y_9)$ とその超対称パートナーの Majorana フェルミオン $\psi_i(t, y)$ を半径 R を用いてモード展開すれば，ハミルトニアン H と $y = y_9$ 方向の運動量 P_9 は次で与えられる $(\pi_i = \dot{\phi}_i)$：

$$H = \frac{1}{R} \sum_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \left(a_n^{i\dagger} a_n^i + b_n^{i\dagger} b_n^i \right), \tag{6.214}$$

$$P_9 = \frac{1}{R} \sum_i \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left(a_n^{i\dagger} a_n^i + b_n^{i\dagger} b_n^i \right). \tag{6.215}$$

今欲しい配位は，P_9 の値を

*30) (t, y_9) 方向の変形の自由度は 2 次元の一般座標変換により消去できてしまう．

$$P_9 = \frac{Q_P}{R_9} = \frac{Q_1 Q_5 Q_P}{R} \tag{6.216}$$

に固定しながら，H の値をできるだけ小さくする状態であるが，これは，右向きモード ($n > 0$) のみが励起している状態である．そこで，i 番目のスカラー場の n 番目の励起モードの数を $L^i_n\,(=0,1,2,3,\ldots)$，i 番目の Majorana フェルミオンの n 番目の励起モードの数を $M^i_n\,(=0,1)$ とすれば，欲しい配位は

$$\frac{1}{R}\left[\sum_{i=1}^{4}\Big(\sum_{n\geq 1} n\,L^i_n + \sum_{n\geq 1} n\,M^i_n\Big)\right] = \frac{Q_1 Q_5 Q_P}{R}\,, \tag{6.217}$$

つまり，

$$\sum_{i=1}^{4}\Big(\sum_{n\geq 1} n\,L^i_n + \sum_{n\geq 1} n\,M^i_n\Big) = Q_1 Q_5 Q_P \tag{6.218}$$

を満たすような，0 以上の整数の組 $\{L^i_n,\, M^i_n\}$ である．

このような数 d_N $(N \equiv Q_1 Q_5 Q_P)$ の母関数は

$$Z \equiv \sum_{N\geq 0} d_N\, q^N = \text{定数} \times \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^4 \tag{6.219}$$

で与えられる[*31]．実際，$N_B^{(R)}$, $N_F^{(R)}$ をそれぞれ，スカラー場とフェルミオンの右向きモードの運動量演算子（を R 倍したもの）とすれば：

$$N_B^{(R)} = \sum_i \sum_{n\geq 1} n\, a^{i\dagger}_n a^i_n\,, \quad N_F^{(R)} = \sum_i \sum_{n\geq 1} n\, b^{i\dagger}_n b^i_n\,, \tag{6.220}$$

母関数は

$$Z = \operatorname{tr} q^{N_B^{(R)} + N_F^{(R)}} = Z_B\, Z_F \tag{6.221}$$

の形に書ける．今は各モードが完全に独立であるので，トレースは独立にとることができ，演算子 $a^{i\dagger}_n a^i_n$ の固有値が $0,1,2,\ldots$ であることと演算子 $b^{i\dagger}_n b^i_n$ の固有値が $0,1$ のみであることを用いれば，

$$Z_B = \prod_i \prod_{n\geq 1} \operatorname{tr} q^{n\, a^{i\dagger}_n a^i_n} = \prod_i \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-q^n} = \prod_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{1-q^n}\Big)^4, \tag{6.222}$$

$$Z_F = \prod_i \prod_{n\geq 1} \operatorname{tr} q^{n\, b^{i\dagger}_n b^i_n} = \prod_i \prod_{n\geq 1} (1+q^n) = \prod_{n\geq 1}\big(1+q^n\big)^4 \tag{6.223}$$

となる．両者をかけて (6.219) を得る．付録 F で示した Cardy の公式に，$N = Q_1 Q_5 Q_P$，$c = N_B + (1/2)N_F = 6$ を代入すれば，$N \gg 1$ に対して，

$$\ln d_N \simeq 2\pi\sqrt{N} = 2\pi\sqrt{Q_1 Q_5 Q_P} \tag{6.224}$$

となる．これは Bekenstein–Hawking エントロピー (6.210) と数係数も含めて

---

*31) 定数はゼロモードからの寄与であり，q に依らない．

一致している．

上の議論では，1 個の D1 と 1 個の D5 がそれぞれ Q_1 回と Q_5 回巻きついている場合のみ考えた．しかしながら，他の配位の状態数は，上と同じかあるいはそれより少ないことを示すことができる[71]．エントロピーは状態数の対数で与えられるため，他の配位の寄与を加えても，結局支配的な寄与は上と同じになる．こうして，Q1–Q5–P 系の Bekenstein–Hawking エントロピーを弦理論から微視的に導出することができた．(注：弦理論側の計算は弱結合のゲージ理論に基づいているため，正確な議論は Witten 指数を比較する必要がある[69].)

6.4.4 D1–D5–P 系のエントロピーの別の導出法

第 4 章において，漸近的に AdS_3 の幾何を持つ 3 次元時空の量子重力理論が 2 次元境界上の共形場理論として扱えることを示した．本節では，上で述べた D1–D5–P 系のホライズン近傍の様子を調べ，この枠組みを適用してみよう[72]．

今，$r \ll r_1, r_5$ というホライズン近傍を見てみる．このとき，調和関数は

$$H_1 \simeq \frac{r_1^2}{r^2}\,, \quad H_5 \simeq \frac{r_5^2}{r^2} \tag{6.225}$$

と近似でき，また 10 次元ディラトン場 ϕ_{10} も

$$\mathrm{e}^{-2\phi_{10}} = \frac{H_5}{H_1} \simeq \frac{r_5^2}{r_1^2} \tag{6.226}$$

と定数になる．今，y_9 の方向を引き続き半径 R_9 でコンパクト化し，座標 (t, y_9, r) から新しい座標 (t', ϕ, ρ) を

$$t' \equiv \frac{\ell}{R_9}\, t\,, \quad \phi \equiv \frac{y_9}{R_9}\,, \quad \rho \equiv \frac{R_9}{\ell} \sqrt{r^2 + r_P^2} = \frac{R_9\, r}{\ell}\, H_P^{1/2}(r)$$
$$\left(\ell \equiv \sqrt{r_1 r_5}\right) \tag{6.227}$$

として導入する [ϕ の周期が 2π になっていることに注意]．すると，ストリングフレームにおける 10 次元計量は，容易な計算から分かるように，

$$\mathrm{d}s_{10}^2 = -\frac{(\rho^2 - \rho_+^2)^2}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}t'^2}{\ell^2} + \rho^2 \left(\mathrm{d}\phi - \frac{\rho_+^2}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}t'}{\ell}\right)^2 + \frac{\ell^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_+^2}\, \mathrm{d}\rho^2$$
$$+\, \ell^2\, \mathrm{d}\Omega_3^2 + \frac{r_1}{r_5} \sum_{i=5}^{8} \mathrm{d}y_i^2 \quad \left(\rho_+ \equiv \frac{R_9}{\ell}\, r_P\right) \tag{6.228}$$

となるが，最初の 3 項はまさに極大 BTZ ブラックホールの計量に他ならず，ℓ は漸近的な AdS_3 の曲率半径になっている．こうして，ホライズン近傍の幾何が (極大 BTZ) $\times\, S^3 \times T^4$ であることが分かった．

BTZ ブラックホールは漸近的に AdS_3 であるため，境界 2 次元に共形対称性が現れる．その中心電荷を計算するため，上記の計量から 3 次元 Einstein フレームでの計量を求めておく．これは，前節と全く同様に行われ，等式

$$\frac{1}{16\pi G_{10}} \int \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}^3\Omega_3 \prod_{i=5}^{8} \sqrt{-g_{10}} \, \mathrm{e}^{-2\phi_{10}} \left[R_{10} + \cdots \right]$$

$$= \frac{1}{16\pi G_3} \int \mathrm{d}t' \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\rho \sqrt{-g_{3,\mathrm{E}}} \left[R_{3,\mathrm{E}} + \cdots \right] \tag{6.229}$$

を置くことにより，

$$\frac{1}{G_3} = \frac{1}{G_{10}} \ell^3 \Omega_3 (2\pi)^4 R_{5678} \left(\frac{r_1}{r_5} \right)^2 \mathrm{e}^{-2\phi_{10}} = \frac{4\ell^3 R_{5678}}{g_s^2 \ell_s^8}, \tag{6.230}$$

$$\mathrm{d}s_{3,\mathrm{E}}^2 = -\frac{(\rho^2 - \rho_+^2)^2}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}t'^2}{\ell^2} + \rho^2 \left(\mathrm{d}\phi - \frac{\rho_+^2}{\rho^2} \frac{\mathrm{d}t'}{\ell} \right)^2 + \frac{\ell^2 \rho^2}{\rho^2 - \rho_+^2} \mathrm{d}\rho^2 \tag{6.231}$$

を得る．これに

$$\ell = \sqrt{r_1 r_5} = \left(\frac{g_s^2 \ell_s^8 Q_1 Q_5}{R_{5678}} \right)^{1/4} \tag{6.232}$$

を代入すると

$$\frac{1}{G_3} = \frac{4R_{5678}^{1/4}}{g_s^{1/2} \ell_s^2} (Q_1 Q_5)^{3/4}, \tag{6.233}$$

となる．(4.150) で導いた Brown–Henneaux の中心電荷の公式に最後の 2 式を代入することで，2 次元境界上の共形場理論の中心電荷が，

$$c = \frac{3\ell}{2G_3} = 6Q_1 Q_5 \tag{6.234}$$

と求まる．

こうして，中心電荷 $c = 6Q_1Q_5$，レベル $N = Q_P$ として Cardy の公式を用いれば，漸近的に AdS_3 の 3 次元時空の境界上の共形場理論のエントロピーが

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{Nc}{6}} = 2\pi \sqrt{Q_1 Q_5 Q_P} \tag{6.235}$$

と求まり，これは，D1–D5–P 系の Bekenstein–Hawking エントロピーと一致する．このことは，量子重力の自由度が境界の場の理論で表されていることを意味し，**ホログラフィー原理** [73], [74] の一つの実現になっている．

6.5 AdS/CFT 対応とエンタングルメント・エントロピー

超弦理論がホログラフィー的性質を持つかどうかは，未解決の問題である．しかしながら最近になり，いくつかの状況証拠が得られてきた．本節では，これの代表的な例である **AdS/CFT 対応** [75] を解説する．これは，短く言えば，『重力理論とゲージ理論の間の双対性』さらには『閉じた弦と開いた弦の間の双対性』である．本小節では，それに関連したいくつかの話題を解説する．

6.5.1 D3 ブレーンと超重力

今，IIB 型超弦理論において N 枚の D3 ブレーンを置いた場合を考えよう．ブレーン自身が張力（3 次元の空間的体積に比例した質量を生む）を持っているため，その周りで時空は曲がってしまう．実際，それを表す古典解は，(6.156)–(6.158) で $p=3$ と置いたもので与えられるが，とくに，そのホライズン近傍は，5 次元反 de Sitter 時空と 5 次元球面の直積（$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$）になる*32)：

$$\mathrm{d}s^2 = \ell^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2} + r^2 \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu + \mathrm{d}\Omega_5^2 \right]. \tag{6.236}$$

ここで，x^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ は D3 ブレーンの世界体積の座標，r はホライズンからの距離，$\mathrm{d}\Omega_5^2$ は単位 5 次元球面の線素である．また，AdS 時空と S^5 の曲率半径 ℓ は $\ell = (4\pi g_s N)^{1/4} \ell_s$ で与えられ，4 次元ゲージ理論の結合定数 g_{YM} は g_s と $g_{\mathrm{YM}}^2 = 4\pi g_s$ の関係にある．さらに，10 次元 Newton 定数が弦理論では $G_{10} \sim g_s^2 \ell_s^8$ と書かれるため，5 次元 Newton 定数はそれを S^5 の体積で割った $G_5 \sim G_{10}/\ell^5 \sim g_s^2 \ell_s^8 / \ell^5$ となる．なお，コンパクト化により AdS_5 上の各 Kaluza–Klein モードには S^5 の等長変換群 $SO(6)$ の対称性が現れるが，これは 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称性の R 対称性 $SU(4) \simeq SO(6)$ に対応する．

今の場合の AdS/CFT 対応とは，大雑把に言って，この「AdS_5 を背景とする 5 次元重力理論」と「D_3 ブレーン上の 4 次元ゲージ理論」が等価になっている，というものである*33)．つまり，5 次元の AdS 重力理論を解析することで 4 次元超対称ゲージ理論の結果を導けるし，逆に，4 次元のゲージ理論の解析からそれを境界に持つ 5 次元重力理論が定まってしまう，というものである．この,『重力理論が，1 次元低い局所場の理論と等価になっている』という点が，まさにホログラフィー的なものになっている*34)．

AdS/CFT 対応のもっと正確な記述は後で行うことにして，この対応がとりあえず成立すべき領域を調べておこう．まず，超弦理論を低エネルギー有効理論で記述してよい領域は，AdS 空間の曲率半径が弦の拡がりに比べてずっと大きなときである：$\ell \gg \ell_s$．これがさらに 5 次元 Einstein 重力で記述されるためには，ℓ は 5 次元 Planck 長さ $(G_5)^{1/3}$ よりもずっと大きい必要がある．それぞれの条件は，$g_s N \sim g_{\mathrm{YM}}^2 N \gg 1$, $N \gg 1$ と書き直すことができるので，結局，AdS 重力理論とゲージ理論との対応が良くなる領域を 4 次元ゲージ理論の言葉で述べれば，ゲージ群が大きく ($N \gg 1$)，さらに，いわゆる't Hooft 結合定数 $g_{\mathrm{YM}}^2 N$ が大きな強結合領域であることが分かる．

---

*32) この線素はホライズンの近傍を引き伸ばして得られるもので，$r \to \infty$ のときでも実はホライズンの近傍にとどまっている．

*33) AdS/CFT 対応のレビューとしては，大部ではあるが，初期の総合報告 [76] が大変分かりやすい．簡単な入門については [77] を見よ．

*34) さらに強く,『$\mathrm{AdS}_5 \times S^5$ を背景とする IIB 超弦理論が 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論と等価である』という予想もある．これについても，いくつかの非自明な状況証拠がある．

6.5.2 AdS 空間

一般に $(d+1)$ 次元反 de Sitter 時空 AdS_{d+1} （またはその Euclid 版である Lobachevsky 空間 EAdS_{d+1}）は，$\mathbb{R}^{d+2}=\left\{(y^{-1},y^{\mu},y^{d});\ \mu=0,1,\ldots,d-1\right\}$ の中の次で定まる部分空間として定義される：

$$-\left(y^{-1}\right)^2+\eta_{\mu\nu}\,y^{\mu}\,y^{\nu}+\left(y^{d}\right)^2=-\ell^2\,. \tag{6.237}$$

ここで $\eta_{\mu\nu}$ は，AdS_{d+1} であるか EAdS_{d+1} であるかに応じて $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}[\mp1,1,\cdots,1]$ と選ぶ．ℓ は AdS の曲率半径である．AdS_{d+1} は $R=-d\,(d+1)/\ell^2$ の負定曲率空間で，宇宙定数 $\Lambda=-d\,(d-1)/2\,\ell^2$ を持つ．境界近傍の様子を見るには次の Poincaré 座標

$$z=\frac{\ell^2}{y^{-1}+y^{d}}\,,\quad x^{\mu}=\frac{1}{\ell}\,y^{\mu}\,z\quad(\mu=0,1,\ldots,d-1) \tag{6.238}$$

が便利で（前節の r は $r=\ell^2/z$ と書ける），このとき，計量は

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\left(\mathrm{d}y^{-1}\right)^2+\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}y^{\mu}\,\mathrm{d}y^{\nu}+\left(\mathrm{d}y^{d}\right)^2\Big|_{\text{条件 (6.237)}}\\&=\frac{\ell^2}{z^2}\left(\mathrm{d}z^2+\eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^{\mu}\,\mathrm{d}x^{\nu}\right)\equiv G^{\mathrm{AdS}}_{MN}(x,z)\,\mathrm{d}X^{M}\mathrm{d}X^{N}\\&\qquad\left[X^{M}=(x^{\mu},z)\right]\end{aligned} \tag{6.239}$$

で与えられる．以下 Euclid 化した EAdS_{d+1} のみ考えることとし，領域 $z>0$ の連結成分を考える．これは $(d+1)$ 次元球体 B^{d+1} と同じ位相を持ち，境界は $z=0$ で与えられる．なお，一番簡単な Lobachevsky 空間は 2 次元 $(d=1)$ 上半平面である：

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\ell^2}{z^2}\left(\mathrm{d}z^2+\mathrm{d}x^2\right)\quad(z>0)\,. \tag{6.240}$$

6.5.3 AdS/CFT 対応

一般の次元における AdS/CFT 対応は次のように述べることができる．まず，AdS_{d+1} 上のスカラー場 $\phi(x,z)$ に対する Einstein–Hilbert 作用 $S_{d+1}[G^{\mathrm{AdS}}_{MN}(x,z),\phi(x,z)]$ を考え，その古典解を $\phi_{\mathrm{c}}(x,z)$ とする．このとき，AdS_{d+1} 内部での正則性より古典解が境界値 $\varphi(x)\equiv\phi_{\mathrm{c}}(x,z=0)$ だけから一意的に定まるとすると，この古典解を作用 S_{d+1} に代入して得られる「古典的作用」は $\varphi(x)$ のみの汎関数となる:

$$S_{d+1}[G^{\mathrm{AdS}}_{MN}(x,z),\phi_{\mathrm{c}}(x,z)]\equiv S[\varphi(x)]\,. \tag{6.241}$$

AdS/CFT 対応が主張することは，この古典的作用が，ある共形場理論 (CFT: Conformal Field Theory) の生成母関数になるというものである [78], [79]:

$$\exp\bigl(-S[\varphi(x)]\bigr)=\left\langle\exp\int\mathrm{d}^{d}x\,\varphi(x)\mathcal{O}(x)\right\rangle_{\mathrm{CFT}}. \tag{6.242}$$

ここで $\mathcal{O}(x)$ は，$\varphi(x)$ をソース (source) とする CFT のスケーリング演算子である．

実際，先の例の 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ゲージ理論は共形不変であることが知られている．また，重力理論におけるディラトン場 φ の古典解は定数で与えられ，境界上ではゲージ場の結合定数と同一視される ($\mathrm{e}^{\varphi} \sim g_{\mathrm{YM}}^2$)．

AdS/CFT 対応の数学的背景は，AdS_{d+1} の等長変換群が境界 ($\sim \mathbb{R}^d$) 上の共形変換群 $SO(d,2)$ ［Euclidean では $SO(d+1,1)$］と同型であることである．これは定義式 (6.237) から明らかであるが，計量 (6.239) についても，AdS_{d+1} 上の無限小一般座標変換 $\epsilon^{\mu}(x,z)=\xi^{\mu}(x)+O(z^2)$, $\epsilon^{z}(x,z)=z\,h(x)+O(z^3)$ が満たす Killing 方程式 $\nabla_M\epsilon_N+\nabla_N\epsilon_M=0$ が，境界 $z=0$ 上で d 次元共形 Killing 方程式 $\partial_\mu\xi_\nu+\partial_\nu\xi_\mu=2\,h\,\eta_{\mu\nu}=(2/d)\,(\partial_\lambda\xi^\lambda)\,\eta_{\mu\nu}$ $\bigl(\xi_\mu\equiv\eta_{\mu\nu}\,\xi^\nu\bigr)$ となることからも分かる．実際このことから AdS/CFT 対応は次のようにして理解できる．まず作用 S_{d+1} はもともと一般座標変換 $f\colon \mathrm{AdS}_{d+1}\to\mathrm{AdS}_{d+1}$ の下で不変なので，とくに f が AdS_{d+1} の等長変換だったときには，古典的作用 $S[\varphi(x)]$ は境界上に引き起こされた共形変換 $\rho\equiv f|_{\partial(\mathrm{AdS}_{d+1})}$ の下で不変になる: $S[\rho^*\varphi(x)]=S[\varphi(x)]$ （ρ^* は ρ の引き戻し）．この式は，$\varphi(x)$ を局所的演算子 $\mathcal{O}(x)$ のソースとみなしたときに，$\mathcal{O}(x)$ が共形場理論のスケーリング演算子になっているという解釈を与える: $\langle\rho^*\mathcal{O}(x_1)\cdots\rho^*\mathcal{O}(x_n)\rangle=\langle\mathcal{O}(x_1)\cdots\mathcal{O}(x_n)\rangle$．

6.5.4 IR/UV 関係

実際には，上の議論は幾つかの修正を要する．まず第一に，古典解を代入したラグランジアン密度の $(d+1)$ 次元空間上の積分は $z=0$ 近傍で発散してしまう．従って，古典的作用を定義するためには，ある $z_0\,(>0)$ を用いて領域を $z\geq z_0$ と制限する必要がある．これは，体積積分の発散を正則化するという意味で赤外正則化になっている．一方，境界上の場の理論として見た場合，共形対称性が成立するのは $z=0$ 上のみであるため，新しい境界 $z=z_0$ 上では共形対称性は失われてしまう．実は，次の段落で示すように，z_0 の導入は d 次元場の量子論としては紫外側の正則化になっている．z_0 のこうした二面的役割は **IR/UV 関係**と呼ばれる [80]．また，スカラー場の重力への反作用を考えると，$(d+1)$ 次元空間内部では必ずしも AdS の計量になっていないため，一般的には漸近的に AdS の計量を持つ空間まで拡大して考察する必要がある．こうして，AdS/CFT 対応は，正則化 z_0 を導入した場合，次の形に一般化される:

「漸近的に AdS の赤外正則化された $(d+1)$ 次元重力理論」

$\Leftrightarrow$「紫外正則化された d 次元場の量子論」

さて，z_0 が d 次元場の量子論の紫外側の長さの単位を与えることは，次のようにして理解できる．まず，曲がった時空の中にソースを 2 つ置いたときの振幅が，2 点 X,Y の間の測地距離を $d(X,Y)$ として，おおよそ $\exp\bigl(-m\,d(X,Y)\bigr)$

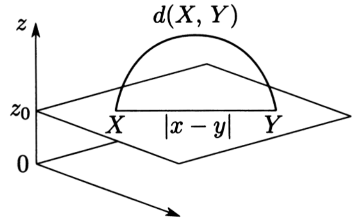


図 6.8　$(d+1)$ 次元空間内の測地線

で与えられることに注意する（図 6.8）．ここで m は質量に相当するパラメーターであり，簡単のため $m \gg \ell^{-1}$ を仮定した．

とくに，2 点を $X=(x^\mu, z_0)$, $Y=(y^\mu, z_0)$ ととった場合には，z_0 が十分小さいとして計量が AdS であるとすると，簡単な計算により

$$d(X,Y) = 2\,\ell\,\ln\left(\frac{|x-y| + \sqrt{|x-y|^2 + 4z_0^2}}{2z_0}\right) \tag{6.243}$$

となることが分かる ($|x|^2 \equiv \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$)．これを代入すると

$$\mathrm{e}^{-m\,d(X,Y)} \sim \left(\frac{2z_0}{|x-y| + \sqrt{|x-y|^2 + 4z_0^2}}\right)^{2m\ell} \tag{6.244}$$

となり，2 点の d 次元超曲面での距離 $|x-y|$ が z_0 に比べて十分大きいときには確かに共形不変な 2 点関数を与える:

$$\langle \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)\rangle \sim \frac{1}{|x-y|^{2m\ell}} \quad \big(|x-y| \gg z_0\big)\,. \tag{6.245}$$

逆にこのことは，z_0 が d 次元場の理論においてスケーリングが破綻する紫外側の長さであることを意味する*35)．

こうして，漸近的に AdS 的な一般の場合について z_0 をいろいろと動かすことで，d 次元場の理論の様々なスケールでの振る舞いが分かることになり，これはくりこみ群としての一つの枠組みを与える．一方，$(d+1)$ 次元重力側から見た場合，このくりこみ群の流れを調べることは，スカラー場の重力場への反作用も考慮に入れて，1 次元低い境界上の値から空間内部の古典的配位を決めることに相当する．そこで現在，この枠組みは**ホログラフィックなくりこみ群** (holographic renormalization group) と呼ばれている*36)．

6.5.5　ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー

すべての場の量子論が上で述べたような重力双対を持つわけではない．しか

---

*35)　一般の $m\ell$ に対して正確な計算をすると，式 (6.245) の右辺は，$1/|x-y|^{2\Delta}$ $\big(\Delta = d/2 + \sqrt{(d/2)^2 + (m\ell)^2}\big)$ となる．

*36)　ホログラフィックなくりこみ群については，例えば，総合報告 [81] を見よ．

しながら，重力双対がある場合には，場の量子論に対していろいろと面白い予想が立てられている．以下では，その一つとして，**ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピー**について解説する*37)．

一般に場の量子論は紫外カットオフを設定して定義される．以下，格子による正則化を採用し，d 次元時空上の Hamilton 形式の場の理論が，$(d-1)$ 次元格子 L を Cauchy 面として定義されているとする．ただし，格子間隔を a とし，力学変数としての場は格子点上に住んでいるものとする．このとき，場の理論の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は各点 $\boldsymbol{x} \in L$ 上の Hilbert 空間 $\mathcal{H}_{\boldsymbol{x}}$ のテンソル積となる：

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{\boldsymbol{x} \in L} \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}} \,. \tag{6.246}$$

以下，系のハミルトニアン H の基底状態を $|0\rangle$ とし，それが定める密度行列を $\rho_0 \equiv |0\rangle\langle 0|$ とおく．

今 L 内の領域 V を考え，全系の Hilbert 空間を V 上のものとその補空間 $\bar{V} \equiv L \backslash V$ 上のものの 2 つに分けておく：

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_V \otimes \mathcal{H}_{\bar{V}} \,, \quad \mathcal{H}_V \equiv \bigotimes_{\boldsymbol{x} \in V} \mathcal{H}_{\boldsymbol{x}} \,, \quad \mathcal{H}_{\bar{V}} \equiv \bigotimes_{\bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{V}} \mathcal{H}_{\bar{\boldsymbol{x}}} \,. \tag{6.247}$$

今，観測者が V 内の情報しか観測できないときは，その観測者にとって入手可能な最大限の情報は，次で定義される**縮約された密度行列**に集約される：

$$\rho_V \equiv \mathrm{tr}_{\bar{V}}\, \rho_0 \,. \tag{6.248}$$

ここで，$\mathrm{tr}_{\bar{V}}$ は $\mathcal{H}_{\bar{V}}$ 上でのトレースである．このとき，領域 V の**エンタングルメント・エントロピー** $S_V[\rho_0]$ は，ρ_V の von Neumann エントロピーとして定義される：

$$S_V[\rho_0] \equiv -\,\mathrm{tr}_V\, \rho_V \ln \rho_V \,. \tag{6.249}$$

$S_V[\rho_0]$ は，状態 ρ_0 における領域 V とその補空間 $\bar{V}$ の間の量子エンタングルメントの大きさを表す*38)．

とくに場の理論に共形不変性がある場合を考えてみよう．時空の次元 d が 2 より大きいときは，場の基本励起の相関関数にクラスター性があるため，一般に量子エンタングルメントは V の境界 ∂V に集中し，

$$S_V[\rho_0] = 定数 \times (\partial V \text{ の格子点の数}) = 定数 \times \frac{|\partial V|}{a^{d-1}} \tag{6.250}$$

という関係が成り立つ．一方，2 次元の場合には，相関関数が距離について対数的な依存性を持つため，上記の関係は

---

*37)　詳しい解説については，提唱者の一人の高柳氏による解説書 [82] を見よ．

*38)　量子エンタングルメントに関する基本事項については，定番の教科書である [83] を見よ．

$$S_V[\rho_0] = \frac{c}{3}\ln\frac{R}{a} + \text{定数} + \mathcal{O}\left(\frac{a^2}{R^2}\right) \tag{6.251}$$

となる[84]．ここで，c は 2 次元共形場理論の中心電荷，また R は領域（今の場合は 1 次元線分）V の長さである．

もし，この共形場理論 CFT_d が重力双対 AdS_{d+1} を持つときには，一般に，エンタングルメント・エントロピーは次の公式で表されると予想されている[85]：

$$S_V[\rho_0] = \frac{1}{4G_{d+1}} A(\partial V)\,. \tag{6.252}$$

ここで，$A(\partial V)$ は，∂V を境界とする AdS 空間内の最小曲面の面積である．

例として，2 次元 ($d=2$) 共形場理論を考えてみよう．このとき，考える領域は，同一時刻 t での線分 $V=[x,y]$ であり，また，∂V を境界とする AdS_3 における "最小曲面" とは 2 点 $X=(t,x)$ と $Y=(t,y)$ を結ぶ測地線のことである．その "最小面積"= 測地距離は，(6.243) で与えたように，

$$A(\partial V) = d(X,Y) = 2\,\ell\,\ln\left(\frac{|x-y| + \sqrt{|x-y|^2 + 4z_0^2}}{2z_0}\right) \tag{6.253}$$

である．従って，領域 V のホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーは

$$\begin{aligned}\frac{1}{4G_3}A(\partial V) &= \frac{\ell}{2G_3}\ln\left(\frac{|x-y| + \sqrt{|x-y|^2 + 4z_0^2}}{2z_0}\right)\\ &= \frac{\ell}{2G_3}\ln\frac{|x-y|}{z_0} + \mathcal{O}\left(\frac{z_0^2}{|x-y|^2}\right)\end{aligned} \tag{6.254}$$

となる．ここで，中心電荷に対する公式 (4.150)：$c = 3\ell/2G_3$ を用いれば，$z_0 = \text{定数} \times a$ として，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーが場の理論のエンタングルメント・エントロピー (6.251) と確かに一致していることが分かる．

場の理論が有限温度の場合は，密度行列 $\rho = \mathrm{e}^{-\beta H}/Z$ ($Z = \mathrm{tr}\,\mathrm{e}^{-\beta H}$) に対してエンタングルメント・エントロピー $S_V[\rho]$ が同様に定義できる．その場合も，重力双対として AdS–Schwarzschild ブラックホール［漸近的に AdS のブラックホール (4.212), (4.213)］を考え，そこにおける最小曲面を考えることで，ホログラフィックなエンタングルメント・エントロピーが定義できる．とくに $d=2$ の場合は BTZ ブラックホールを考えることになるが，2 つのエントロピーは正しく一致することが知られている．

付録 A
公式集

A.1 記号の一般規則

d は時空 $\mathcal{M}$ の次元を表し，Minkowski 空間の計量は $\eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(-1, +1, \ldots, +1)$ とする．

テンソル添え字の対称化・反対称化を次で定義する：

$$A_{(\mu_1 \cdots \mu_n)} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A_{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(n)}}\,, \tag{A.1}$$

$$A_{[\mu_1 \cdots \mu_n]} \equiv \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} A_{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(n)}}\,. \tag{A.2}$$

ここで，S_n は n 次の置換群で，$(-1)^{\sigma}$ は $\sigma \in S_n$ の符号数を表す．つまり，σ が偶置換ならば $(-1)^{\sigma} = +1$，奇置換ならば $(-1)^{\sigma} = -1$ である．重みは，$A_{((\mu_1 \cdots \mu_n))} = A_{(\mu_1 \cdots \mu_n)}\,,\ A_{[[\mu_1 \cdots \mu_n]]} = A_{[\mu_1 \cdots \mu_n]}$ となるように選んでいる．

$\mathcal{M}$ 内の超曲面 Σ に対し，Σ の単位法ベクトル $n = n^{\mu}\partial_{\mu}$ が時間的であるか空間的であるかに応じて，$n^2 = \mp 1 \equiv \epsilon(n)$ と書く．$g_{\mu\nu}$ の分解を $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \epsilon(n)\, n_{\mu}\, n_{\nu}$ とするとき（断りのない限り添え字の上げ下げは $g_{\mu\nu}$ を用いて行う），$\mathcal{M}$ 上のテンソル $A_{\mu\nu}$ の Σ に平行な成分は $A^{\Sigma}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu}{}^{\alpha}\, h_{\nu}{}^{\beta}\, A_{\alpha\beta}$ である．そのトレースレス対称部分を次で定義する：

$$\begin{aligned} A_{\langle\mu\nu\rangle} &\equiv A^{\Sigma}_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1}\,(h^{\alpha\beta} A^{\Sigma}_{\alpha\beta})\, h_{\mu\nu} \\ &= h_{\mu}{}^{\alpha}\, h_{\nu}{}^{\beta}\, A_{\alpha\beta} - \frac{1}{d-1}\,(h_{\lambda}{}^{\alpha}\, h^{\lambda\beta}\, A_{\alpha\beta})\, h_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{A.3}$$

A.2 微分と曲率に関する公式

Christoffel 記号は

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\,(\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \tag{A.4}$$

で定義され，添字を縮約したものは

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} = \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma}\,\partial_\mu g_{\rho\sigma} = \partial_\mu \ln\sqrt{|g|} \tag{A.5}$$

と書ける．

共変微分は (p,q) テンソル $T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ に対して

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} \equiv \partial_\lambda T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\mu'_1}\, T^{\mu'_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} + \cdots + \Gamma^{\mu_p}_{\lambda\mu'_p}\, T^{\mu_1\cdots\mu'_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} \\ - \Gamma^{\nu'_1}_{\lambda\nu_1}\, T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu'_1\cdots\nu_q} - \cdots - \Gamma^{\nu'_q}_{\lambda\nu_q}\, T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu'_q}\end{aligned} \tag{A.6}$$

と作用し，共変発散に関して次の等式が成り立つ:

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu\bigl(\sqrt{|g|}\, v^\mu\bigr)\,, \quad \nabla_\nu B^{[\mu\nu]} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\nu\bigl(\sqrt{|g|}\, B^{[\mu\nu]}\bigr)\,. \tag{A.7}$$

曲率テンソルと Einstein テンソルは

$$R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \equiv \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\,\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\,, \tag{A.8}$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\rho\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} = R^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}\,, \qquad R \equiv g^{\mu\nu}\, R_{\mu\nu}\,, \tag{A.9}$$

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, R\, g_{\mu\nu} \tag{A.10}$$

で定義され，これらは

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho} = R_{\rho\sigma\mu\nu}\,, \tag{A.11}$$

$$R_{\mu\nu\lambda}{}^{\rho} + R_{\nu\lambda\mu}{}^{\rho} + R_{\lambda\mu\nu}{}^{\rho} = 0 \qquad (\text{第 1 Bianchi 恒等式})\,, \tag{A.12}$$

$$\nabla_\mu R_{\nu\lambda\rho\sigma} + \nabla_\nu R_{\lambda\mu\rho\sigma} + \nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (\text{第 2 Bianchi 恒等式})\,, \tag{A.13}$$

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0 \tag{A.14}$$

などを満たす．

交換子 $\bigl[\nabla_\mu,\,\nabla_\nu\bigr]$ は，(p,q) テンソル $T^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}$ に対して

$$\begin{aligned}&\bigl[\nabla_\mu,\,\nabla_\nu\bigr]\, T^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} \\ &= R_{\mu\nu}{}^{\rho_1}{}_{\rho'_1}\, T^{\rho'_1\cdots\rho_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} + \cdots + R_{\mu\nu}{}^{\rho_p}{}_{\rho'_p}\, T^{\rho_1\cdots\rho'_p}_{\sigma_1\cdots\sigma_q} \\ &\quad - R_{\mu\nu}{}^{\sigma'_1}{}_{\sigma_1}\, T^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma'_1\cdots\sigma_q} - \cdots - R_{\mu\nu}{}^{\sigma'_q}{}_{\sigma_q}\, T^{\rho_1\cdots\rho_p}_{\sigma_1\cdots\sigma'_q}\end{aligned} \tag{A.15}$$

と作用する．

ベクトル場 $\epsilon = \epsilon^\mu\,\partial_\mu$ による Lie 微分 $\pounds_\epsilon$ は，(p,q)-tensor $T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ に対して

$$\begin{aligned}&\pounds_\epsilon T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} \\ &= \epsilon^\rho \partial_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\mu_1\cdots\nu_q} - \partial_\rho \epsilon^{\mu_1}\, T^{\rho\mu_2\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} - \cdots - \partial_\rho \epsilon^{\mu_p}\, T^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\rho}_{\nu_1\cdots\nu_q}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \partial_{\nu_1}\epsilon^\rho\, T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\rho\nu_2\cdots\nu_q} + \cdots + \partial_{\nu_q}\epsilon^\rho\, T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_{q-1}\rho} \\
&= \epsilon^\rho \nabla_\rho T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\mu_1\cdots\nu_q} - \nabla_\rho\epsilon^{\mu_1}\, T^{\rho\mu_2\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_q} - \cdots - \nabla_\rho\epsilon^{\mu_p}\, T^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\rho}_{\nu_1\cdots\nu_q} \\
&+ \nabla_{\nu_1}\epsilon^\rho\, T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\rho\nu_2\cdots\nu_q} + \cdots + \nabla_{\nu_q}\epsilon^\rho\, T^{\mu_1\cdots\mu_p}_{\nu_1\cdots\nu_{q-1}\rho}
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

と作用し，$\sqrt{|g|} \equiv \sqrt{|\det g|}$ に対しては

$$
\pounds_\epsilon \sqrt{|g|} = \nabla_\mu \epsilon^\mu \sqrt{|g|} \tag{A.17}
$$

と作用する．

Killing ベクトル $\xi = \xi^\mu\, \partial_\mu$ に対して，次が成り立つ：

$$
\nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\nu = R^\sigma{}_{\rho\mu\nu}\, \xi_\sigma \,, \tag{A.18}
$$

$$
\nabla^\nu \nabla_\mu \xi_\nu = R_{\mu\nu}\, \xi^\nu \,. \tag{A.19}
$$

実際，

$$
\left[\nabla_\mu,\, \nabla_\nu\right] \xi_\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\rho = R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma\, \xi_\sigma \tag{A.20}
$$

において $\mu\nu\rho$ を反対称化すると第 1 Bianchi 恒等式 (A.12) から

$$
\nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\rho + \nabla_\nu \nabla_\rho \xi_\mu + \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\nu = 0 \tag{A.21}
$$

となる．すると ξ^μ に対する Killing 方程式から (A.18) が得られる．さらに $g^{\rho\nu}$ で縮約を取れば (A.19) が得られる．

$g_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ と無限小変化させたとき，次が成り立つ:

$$
\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\, g^{\rho\sigma} \left(\nabla_\mu \delta g_{\sigma\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} \right), \tag{A.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma &= \nabla_\mu \delta\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma} \\
&= \frac{1}{2} \big(g^{\rho\lambda}\, \nabla_\mu \nabla_\sigma \delta g_{\lambda\nu} - g^{\rho\lambda}\, \nabla_\nu \nabla_\sigma \delta g_{\lambda\mu} \\
&\qquad\qquad - \nabla_\mu \nabla^\rho \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \nabla^\rho \delta g_{\mu\sigma} \big) \\
&\quad + g^{\rho\,(\alpha}\, \delta^{\gamma)}_\sigma\, g^{\beta\lambda} R_{\mu\nu\alpha\beta}\, \delta g_{\gamma\lambda} \,,
\end{aligned}
\tag{A.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \big(\nabla_\rho \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} + g^{\rho\sigma}\, \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g_{\rho\sigma} \big) \\
&\quad + \nabla_{(\mu} \nabla^\rho \delta g_{\nu)\rho} + R^\rho_{(\mu} \delta g_{\nu)\rho} - R_{\mu\alpha\nu\beta} g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} \delta g_{\rho\sigma} \,,
\end{aligned}
\tag{A.24}
$$

$$
\delta R = -R^{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} \,, \tag{A.25}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\sqrt{|g|}\, R) &= -\sqrt{|g|} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, R\, g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \\
&\quad + \partial_\rho \big[\sqrt{|g|}\, \big(g^{\rho\mu}\, \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\, \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} \big) \big] \,.
\end{aligned}
\tag{A.26}
$$

A.3 超曲面上での積分に関する公式

A.3.1 時間的または空間的な超曲面の場合

d 次元時空における Levi–Civita の記号

$$\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d} = \epsilon_{[\mu_1\cdots\mu_d]}\,, \qquad \epsilon_{1\cdots d} = 1 \tag{A.27}$$

を用いて，$(d-p)$-form

$$(\mathrm{d}^{d-p}x)_{\mu_1\cdots\mu_p} \equiv \frac{\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_p\mu_{p+1}\cdots\mu_d}}{p!\,(d-p)!}\,\mathrm{d}x^{\mu_{p+1}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{\mu_d}\,, \tag{A.28}$$

を定義する．このとき，単位法ベクトル n^μ を持つ $(d-1)$ 次元超曲面 Σ_t 上の面積要素を

$$\mathrm{d}S[n] \equiv \sqrt{|g|}\,n^\mu(\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu\,, \tag{A.29}$$

で定義する．また

$$\mathrm{d}S_\mu \equiv \sqrt{|g|}\,(\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu\,, \tag{A.30}$$

を定義すると

$$\mathrm{d}S[n] \equiv n^\mu\,\mathrm{d}S_\mu\,, \qquad \mathrm{d}S_\mu|_{\Sigma_t} \equiv \varepsilon(n)\,n_\mu\,\mathrm{d}S[n] \tag{A.31}$$

となる．また，不変体積要素は $\mathrm{d}V \equiv \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^dx$ と記す．

このとき，ベクトル場 V^μ や反対称テンソル場 $W^{\mu\nu}$ に対して，次の **Gauss–Stokes の定理**が成り立つ:

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}\mathrm{d}S_\mu\,V^\mu &= \int_{\partial V}(\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu\,\sqrt{|g|}\,V^\mu \\ &= \int_V \mathrm{d}^dx\,\partial_\mu\big(\sqrt{|g|}\,V^\mu\big) = \int_V \sqrt{|g|}\,\mathrm{d}^dx\,\nabla_\mu V^\mu\,,\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial V}(\mathrm{d}^{d-1}x)_{\mu\nu}\,\sqrt{|g|}\,W^{\mu\nu} &= \int_V(\mathrm{d}^{d-1}x)_\mu\,\partial_\nu\big(\sqrt{|g|}\,W^{\mu\nu}\big) \\ &= \int_V \mathrm{d}S_\mu\,\nabla_\nu W^{\mu\nu}\,.\end{aligned} \tag{A.33}$$

A.3.2 ヌル超曲面の場合

$k = k^\mu\,\partial_\mu = \partial/\partial\lambda$ を法ベクトル場とする $(d-1)$ 次元ヌル超曲面 $\mathcal{N}$ に対し，$\mathcal{N}$ の座標として λ と y^a $(a=1,\ldots,d-2)$ を選ぶ．さらに，$l^2=0,\ k^\mu\,l_\mu=-1$ を満たすベクトル場 $l = l^\mu\,\partial_\mu$ を導入する．このとき，$\mathcal{N}$ 上の λ 一定面 $\mathcal{N}_\lambda$ 上の誘導計量を $\mathrm{d}s^2|_{\mathcal{N}_\lambda} = q_{ab}\,\mathrm{d}y^a\,\mathrm{d}y^b$ とし，$\mathcal{N}_\lambda$ 上の面積要素を

$$\mathrm{d}S_{\mu\nu} \equiv \frac{\sqrt{q}}{(d-2)!}\,\epsilon_{\mu\nu a_1\cdots a_{d-2}}\,\mathrm{d}y^{a_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y^{a_{d-2}} \tag{A.34}$$

で定義する $\left[k^\mu l^\nu \epsilon_{\mu\nu 12\cdots(d-2)} \equiv 1,\ \sqrt{q} \equiv \sqrt{\det(q_{ab})}\right]$. $\mathcal{N}_\lambda$ の任意の接ベクトル s^μ に対して $s^\mu \, \mathrm{d}S_{\mu\nu}|_{\mathcal{N}_\lambda} = 0 = s^\nu \, \mathrm{d}S_{\mu\nu}|_{\mathcal{N}_\lambda}$ となることと，$l^\mu k^\nu \, \mathrm{d}S_{\mu\nu} = \mathrm{d}A$ $\left(\mathrm{d}A \equiv \sqrt{q}\, \mathrm{d}^{d-2}y\right)$ から，$\mathrm{d}S_{\mu\nu}$ は $\mathcal{N}$ の**双法面テンソル** (binormal) $\varepsilon_{\mu\nu} \equiv k_\mu l_\nu - l_\mu k_\nu$ を用いて $\mathrm{d}S_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} \, \mathrm{d}A$ と書ける．また，$\mathcal{N}$ 上の面積要素を

$$\mathrm{d}S_\mu \equiv \frac{\sqrt{q}}{(d-2)!} \epsilon_{\mu\lambda a_1 \cdots a_{d-2}} \, \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}y^{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{a_{d-2}} \tag{A.35}$$

で定義すると，これは $\mathrm{d}S_\mu = \mathrm{d}\lambda \, \mathrm{d}A \, k_\mu$ と書ける．

付録 B

Frobenius の定理

Frobenius の定理はもともと任意の余次元 (codimension) の部分多様体に関する定理であるが，この付録では，本文中で必要な「余次元が 1 の超曲面」に限って，おおざっぱな証明を与える．一般の場合も含んだ厳密な証明については [86] を見よ．

今 d 次元多様体 $\mathcal{M}$ のある開領域 $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ において，至る所でゼロでない1-形式 $\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$ があったとする．すると，各点 $P \in \mathcal{O}$ の接空間 $T_P\mathcal{M}$ の中に，ω_P と垂直な接ベクトルからなる $d-1$ 次元部分線形空間 $\mathcal{D}_P$ が作れる：

$$\mathcal{D}_P \equiv \left\{ X_P = X_P^\mu \, \partial_\mu|_P \in T_P\mathcal{M} \;\middle|\; \langle \omega_P, X_P \rangle_P = \omega_{P,\,\mu} X_P^\mu = 0 \right\}. \tag{B.1}$$

このとき，点 $P \in \mathcal{O}$ に対して $\mathcal{D}_P$ を割り当てる写像 $\mathcal{D}$ ： $P \mapsto \mathcal{D}_P$ を $\mathcal{O}$ 上の $(d-1)$ 次元微分式系といい，それを規定する方程式 $\omega = 0$ を $\mathcal{D}$ の局所方程式と呼ぶ．$\mathcal{D}$ の局所方程式が $\mathcal{O}$ で定義された滑らかな関数 f を用いて $\mathrm{d}f = 0$ とも書けるとき，$\mathcal{D}$ を完全積分可能という．これは，$\omega_\mu \propto \partial_\mu f$ と等価である．

定理 B.1　次の 4 条件は同値である：

(1) $\mathcal{D}$ は完全積分可能.

(2) $\mathcal{D}$ の任意のベクトル場 $X = X^\mu \partial_\mu$, $Y = Y^\mu \partial_\mu \in \mathcal{D}$ について $[X, Y] \in$

(3) ある 1-形式 $\eta = \eta_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$ を用いて，$\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \eta$ と書ける．

(4) $\omega_{[\mu} \partial_\nu \, \omega_{\rho]} \left(= \omega_{[\mu} \nabla_\nu \, \omega_{\rho]} \right) = 0$.

まず $\mathcal{D}$ が完全積分可能なときは，$f =$ 定数 $(\equiv a)$ が定める超曲面 Σ_a は $\mathcal{D}$ の積分多様体となっている．つまり，Σ_a 上の点 Q の接空間 $T_Q\Sigma_a$ は $\mathcal{D}_Q$ と一致する．Σ_a 上の局所座標を $\boldsymbol{y} = (y^i)$ $(i = 1, \ldots, d-1)$ とおけば，$\mathcal{O}$ の局所座標系として $x = (x^\mu) = (\boldsymbol{y}, f)$ がとれる．このとき，$X, Y \in \mathcal{D}$ は $X = X^i(\boldsymbol{y}, f)$
$Y = Y^i(\boldsymbol{y}, f) \, \partial_{y^i}$ の形になるので，$[X, Y] = (X^j \partial_{y^j} Y^i - Y^j \partial_{y^j} X^i) \, \partial_{y^i}$

が成り立つ．これで (1) ⇒ (2) が示せた．逆は省略する．

さて，完全積分可能な $\mathcal{D}$ に属するベクトル場 X, Y について，(2) より，

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_\mu [X,Y]^\mu = \omega_\mu \left(X^\nu \partial_\nu Y^\mu - Y^\nu \partial_\nu X^\mu\right) \\ &= -(\partial_\mu\omega_\nu - \partial_\nu\omega_\mu) X^\mu Y^\nu = -(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu \end{aligned} \tag{B.2}$$

である．ここで，$\omega_\mu X^\mu = \omega_\mu Y^\mu = 0$ を使った．(B.2) 式は，$(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu}$ の足 μ, ν の少なくともどちらか一方は $\mathcal{D}$ と直交していることを表している．つまり，ω 方向の成分を持っているということである．従って，反対称性も考慮すれば，ある η_μ を用いて $(\mathrm{d}\omega)_{\mu\nu} = \omega_\mu \eta_\nu - \eta_\mu \omega_\nu = (\omega \wedge \eta)_{\mu\nu}$ が成立しているはずである．これで (2) ⇒ (3) が示せた．(3) ⇒ (2) については，今の話を逆にたどり，$\omega_\mu [X, Y]^\mu = 0$ を示せばよい．

(3) が成り立っているとき，1-形式 ω について $\omega \wedge \omega = 0$ であることから，$\omega \wedge \mathrm{d}\omega = \omega \wedge (\omega \wedge \eta) = (\omega \wedge \omega) \wedge \eta = 0$ となる．成分で書けば，(4) そのものである．これで (3) ⇒ (4) が示せた．

(4) つまり $\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0$ が成立しているということは，各点 $P \in \mathcal{O}$ において，$(\mathrm{d}\omega)_P$ が張る 2 次元平面と ω_P が作る 1 次元直線で 3 次元空間は張れず，2 つが平行であるということである（2 つは原点を共有している）．このことは $(\mathrm{d}\omega)_P$ が ω_P と他のベクトルで張られていることを意味する．それを $\eta_P = \eta_{P,\mu}\, \mathrm{d}x^\mu|_P$ とすれば，結局，$\mathrm{d}\omega$ は 1-形式 η を用いて $\mathrm{d}\omega = \omega \wedge \eta$ と書けることになる．これで (4) ⇒ (3) が示せた[*1]． □

なお，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ が与えられているときは，1 形式 $\omega = \omega_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$ からベクトル場 $n[\omega]$ が，$n[\omega] \equiv \omega^\mu \partial_\mu$ $(\omega^\mu \equiv g^{\mu\nu}\omega_\nu)$ として導入できる．このとき，局所方程式 $\omega = 0$ で定義される微分式系が完全積分可能であるとは，ある関数 f を用いて $\omega^\mu \propto g^{\mu\nu} \partial_\nu f$ と書けることである．これは，ベクトル場 $n[\omega]$ が超曲面直交であるということに他ならない．従って，ω^μ を n^μ と書き直し，前定理の (1) と (4) の同値性を用いれば次の定理が得られる：

定理 B.2　計量テンソル $g_{\mu\nu}$ があるとき，ベクトル場 $n = n^\mu \partial_\mu$ に対する次の 2 条件は同値である：

(1) n は超曲面直交．

(2) $n_\mu \equiv g_{\mu\nu} n^\nu$ に対して，次が成り立つ：

$$n_{[\mu}\partial_\nu n_{\rho]} \left(= n_{[\mu}\nabla_\nu n_{\rho]}\right) = 0\,. \tag{B.3}$$

---

*1)　(4) ⇒ (2) は次のようにして直接示すこともできる：

(4) が成立しているとき，任意のベクトル場 $X, Y \in \mathcal{D}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &= 6\, X^\mu Y^\nu \omega_{[\mu}\, \partial_\nu \omega_{\rho]} = \omega_\rho \left(X^\mu Y^\nu - X^\nu Y^\mu\right) \partial_\mu \omega_\nu \\ &= -\omega_\rho \left(X^\mu \partial_\mu Y^\nu - \partial_\mu X^\nu\, Y^\mu\right) \omega_\nu = -\omega_\rho\, [X,Y]^\nu \omega_\nu\,. \end{aligned}$$

従って，$[X,Y]^\nu \omega_\nu = 0$ となり，$[X,Y] \in \mathcal{D}$． □

付録 C

時間的または空間的な場合のRicciテンソルの分解

ここでは，時間的または空間的な超曲面 Σ_t を用いて時空を $(d-1)+1$ 分解したときに，Ricci テンソル $R_{\mu\nu}$ の成分 $n^\mu n^\nu R_{\mu\nu}$, $n^\mu e^\nu_i R_{\mu\nu}$, $e^\mu_i e^\nu_j R_{\mu\nu}$, そして，Ricci スカラー R を $(d-1)$ 次元超曲面 Σ_t 上のテンソルを用いて表す公式 (C.8)–(C.11) を導出する．

まず，外部曲率 $K(v,w)$ を用いると n^μ と直交するベクトル場 v^μ, w^μ に対して

$$
\begin{aligned}
\nabla_v w^\mu &= h^\mu_\nu \nabla_v w^\nu + \varepsilon(n)\, n^\mu\, n_\nu\, \nabla_v w^\nu \\
&= D_v w^i\, e^\mu_i - \varepsilon(n)\, n^\mu\, \nabla_v n_\nu\, w^\nu \\
&= D_v w^\mu - \varepsilon(n)\, K(v,w)\, n^\mu
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

が得られ，これは Gauss–Weingarten 方程式と呼ばれる．この両辺を ∇_u（u：n と直交するベクトル）で微分すると

$$
\begin{aligned}
\nabla_u \nabla_v w^\mu &= \nabla_u D_v w^\mu - \varepsilon(n)\, D_u\big[K(v,w)\big]\, n^\mu - \varepsilon(n)\, K(v,w)\, \nabla_u n^\mu \\
&= D_u D_v w^\mu - \varepsilon(n)\, K(v,w)\, \nabla_u n^\mu \\
&\quad - \varepsilon(n)\, \big\{K(u,\, D_v w) + D_u\big[K(v,w)\big]\big\}\, n^\mu
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

が得られ（二つ目の等式でも Gauss–Weingarten 方程式を用いた），これから

$$
\begin{aligned}
&\big[\nabla_u,\, \nabla_v\big]\, w^\mu \\
&= \big[D_u,\, D_v\big]\, w^i\, e^\mu_i - \varepsilon(n)\, K(v,w)\, \nabla_u n^\mu + \varepsilon(n)\, K(u,w)\, \nabla_v n^\mu \\
&\quad + \varepsilon(n)\, \big\{[D_v K](u,w) - [D_u K](v,w) + K([v,\, u],\, w)\big\}\, n^\mu
\end{aligned}
\tag{C.3}
$$

を得る．とくに，$u = e_k$, $v = e_l$, $w = e_j$ とすると

$$e^\nu_j\, e^\rho_k\, e^\sigma_l\, R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = {}^{(d-1)}R^i{}_{jkl}\, e^\mu_i - \varepsilon(n)\left(K_{lj}\,\nabla_{e_k} n^\mu - K_{kj}\,\nabla_{e_l} n^\mu\right)$$
$$+\,\varepsilon(n)\left(D_l K_{kj} - D_k K_{lj}\right) n^\mu \qquad \text{(C.4)}$$

となる．ここで，${}^{(d-1)}R^l{}_{ijk}$ は計量 h_{ij} に関する Riemann テンソルである．この式の両辺を $e_{i\mu}$ および n_μ と縮約することで **Gauss–Codazzi 方程式**を得る：

$$n^\mu\, e^\nu_j\, e^\rho_k\, e^\sigma_l\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = D_l K_{kj} - D_k K_{lj}\,, \qquad \text{(C.5)}$$
$$e^\mu_i\, e^\nu_j\, e^\rho_k\, e^\sigma_l\, R_{\mu\nu\rho\sigma} = {}^{(d-1)}R_{ijkl} - \varepsilon(n)\left(K_{lj}\, K_{ki} - K_{kj}\, K_{li}\right). \qquad \text{(C.6)}$$

次に，Riemann テンソルの $n^\sigma\, n^\nu\, e^\mu_i\, e^\rho_j\, R_{\rho\sigma\mu\nu}$ 成分は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} n^\sigma\, n^\nu\, e^\mu_i\, e^\rho_j\, R_{\rho\sigma\mu\nu} &= n^\nu\, e^\mu_i\, e^\rho_j\, [\nabla_\mu,\, \nabla_\nu]\, n_\rho \\ &= e^\mu_i\, e^\rho_j\, \nabla_\mu\big(n^\nu \nabla_\nu n_\rho\big) - K^k_i\, K_{kj} - e^\mu_i\, e^\rho_j\, \nabla_\nu\big(n^\nu \nabla_\mu n_\rho\big) + K\, K_{ij} \\ &= -(K^k_i\, K_{kj} - K\, K_{ij}) + e^\mu_i\, e^\rho_j\, \nabla_\lambda\big(\delta^\lambda_\mu\, \nabla_n n_\rho - n^\lambda\, \nabla_\mu n_\rho\big)\,. \end{aligned} \qquad \text{(C.7)}$$

すると，Ricci テンソルは

$$\begin{aligned} n^\mu n^\nu R_{\mu\nu} &= n^\sigma n^\nu h^{ij} e^\mu_i e^\rho_j R_{\rho\sigma\mu\nu} \\ &= -\,(K_{ij}K^{ij} - K^2) + h^{\mu\rho}\nabla_\lambda(\delta^\lambda_\mu\, n^\nu \nabla_\nu n_\rho - n^\lambda \nabla_\mu n_\rho) \\ &= -\,(K_{ij}K^{ij} - K^2) + \nabla_\lambda(n^\nu \nabla_\nu n^\lambda - n^\lambda \nabla_\mu n^\mu)\,, \end{aligned} \qquad \text{(C.8)}$$
$$\begin{aligned} n^\mu e^\nu_i R_{\mu\nu} &= n^\mu h^{jk} e^\rho_j e^\sigma_k e^\nu_i R_{\rho\mu\sigma\nu} \\ &= D^j K_{ij} - \partial_i K\,, \end{aligned} \qquad \text{(C.9)}$$
$$\begin{aligned} e^\mu_i e^\nu_j R_{\mu\nu} &= h^{kl} e^\rho_k e^\sigma_l e^\mu_i e^\nu_j R_{\rho\mu\sigma\nu} + \varepsilon(n) n^\rho n^\sigma e^\mu_i e^\nu_j R_{\rho\mu\sigma\nu} \\ &= {}^{(d-1)}R_{ij} + \varepsilon(n)\, e^\mu_i e^\rho_j \nabla_\lambda(\delta^\lambda_\mu\, n^\nu \nabla_\nu n_\rho - n^\lambda \nabla_\mu n_\rho)\,, \end{aligned} \qquad \text{(C.10)}$$

となり，Ricci スカラーは次のように書ける：

$$\begin{aligned} R &= h^{ij}\, e^\mu_i\, e^\nu_j\, R_{\mu\nu} + \varepsilon(n)\, n^\mu\, n^\nu\, R_{\mu\nu} \\ &= {}^{(d-1)}R - \varepsilon(n)\left(K_{ij}\, K^{ij} - K^2\right) + 2\varepsilon(n)\, \nabla_\mu\big(\nabla_n n^\mu - n^\mu\, K\big)\,. \end{aligned} \qquad \text{(C.11)}$$

付録 D
Hawking輻射

遠方から見るとブラックホールはHawking温度で粒子の輻射をしているように観測される．この付録では，この**Hawking輻射**をHawkingの原論文 [28] に沿って解説する．以下では，図D.1のPenrose図のように，球対称な星が重力崩壊を起こしてできたSchwarzschildブラックホールを扱う．

球対称性とBirkoffの定理から，星の外部の計量はSchwarzschild計量で与えられる［(1.183) 式参照］:

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + r^2\,\mathrm{d}\Omega_2^2\,, \tag{D.1}$$

$$u = t - r^*\,,\quad v = t + r^*\quad \left[r^* = r + 2GM\,\ln\!\left(\frac{r}{2GM}-1\right)\right]. \tag{D.2}$$

この動的重力場を背景場として，ゼロ質量の実スカラー場を考える：

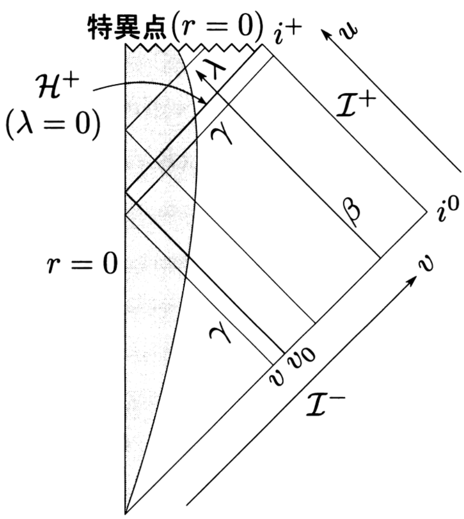


図 D.1　重力崩壊の過程を表すPenrose図．灰色の領域は崩壊中の星の内部の軌跡を表す．

$$S[\phi(x)] = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\,\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi\,. \tag{D.3}$$

3.1 節の一般論を適用するため，場 $\phi(x)$ を球面調和関数場 $\{Y_{\ell m}(\Omega)\}$ を用いて

$$\phi(x) = \sum_{\ell,m}\frac{1}{r}\,\phi_\ell(t,r)\,Y_{\ell m}(\Omega) \tag{D.4}$$

と展開すれば，Klein–Gordon 方程式は $\phi_\ell(t,r)$ に対する次の微分方程式になる：

$$\left[\partial_t^2 - \partial_{r^*}^2 + V_\ell(r)\right]\phi_\ell(t,r) = 0\,, \tag{D.5}$$

$$V_\ell(r) \equiv \left(1-\frac{2\,GM}{r}\right)\left[\frac{\ell\,(\ell+1)}{r^2}+\frac{2\,GM}{r^3}\right]. \tag{D.6}$$

未来イベントホライズン $\mathcal{H}^+$ $(r = 2GM \Leftrightarrow r^* = -\infty)$ およびヌル無限遠 $\mathcal{I}^\pm$ $(r = +\infty \Leftrightarrow r^* = +\infty)$ ではポテンシャル $V_\ell(r)$ が 0 になるため，正エネルギー解の漸近形は外向きモード $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t-r^*)}$ と内向きモード $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t+r^*)}$ の線形結合となる［(1.180) 参照］.

in-真空と out-真空と粒子生成

過去ヌル無限遠 $\mathcal{I}^-$ の近傍は重力崩壊が起こるよりも十分過去の無限遠を表し，Minkowski 時空で近似できる．通常我々がスカラー場の真空と言っているものはこの $\mathcal{I}^-$ 近傍での真空であり，これを “in-真空” $|0;\mathrm{in}\rangle$ と呼ぶことにする．一方，ブラックホールができてから十分時間がたつと，時空は定常ブラックホール時空で近似でき，そこでの真空を “out-真空” $|0;\mathrm{out}\rangle$ と呼ぶことにする．以下では，まずこの 2 つの真空をきちんと定義する．

最初に，$\mathcal{I}^-$ 近傍での正エネルギー解に対応した in-真空 $|0;\mathrm{in}\rangle$ を定義するため，Cauchy 面として $\Sigma = \mathcal{I}^-$ をとり，(3.8) と (3.9) を満たす解を探す．このとき，外向きの正エネルギー解 ($\propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}$) 同士の Klein–Gordon (KG) 内積 (3.3) は常に 0 となるため，$\mathcal{I}^-$ 近傍の正エネルギー解は必ず次の漸近形を持つ：

$$f_I(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v}}{\sqrt{4\pi\,\omega}\,r}\,Y_{\ell m}(\Omega)\quad \left[I \equiv (\omega,\ell,m)\right]. \tag{D.7}$$

ここで $\{f_I(x)\}$ は，KG 内積が $\langle f_I, f_{I'}\rangle = \delta_{II'} \equiv \delta(\omega-\omega')\,\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'}$ となるように規格化した．この完全系 $\{f_I(x)\}$ を用いて場 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \sum_I\left[\,a_I\,f_I(x) + a_I^\dagger\,f_I^*(x)\right]\quad \left(\sum_I \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\sum_{\ell,m}\right) \tag{D.8}$$

と展開し，in-真空 $|0;\mathrm{in}\rangle$ を次で定義する：

$$a_I\,|0;\mathrm{in}\rangle = 0\quad \left[\forall I = (\omega,\ell,m)\right]. \tag{D.9}$$

次に，$\mathcal{I}^+$ 近傍での正エネルギー解に対応した out-真空 $|0;\mathrm{out}\rangle$ を定義するため，Cauchy 面として $\Sigma' = \mathcal{I}^+\cup\mathcal{H}^+$ をとり，正エネルギー解として $\mathcal{I}^+$ 上

にのみ台を持つ関数系 $\{p_I(x)\}$ と $\mathcal{H}^+$ 上にのみ台を持つ関数系 $\{q_I(x)\}$ を採用する．ここで，前段落で述べたことと同じ理由により，$\{p_I(x)\}$ は $\mathcal{I}^+$ 上で

$$p_I(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}}{\sqrt{4\pi\omega}\, r} Y_{\ell m}(\Omega) \tag{D.10}$$

という漸近形を持つ．この新しい完全系 $\{p_I(x)\} \cup \{q_I(x)\}$ を用いて，場を

$$\phi(x) = \sum_I \left[b_I\, p_I(x) + b_I^\dagger\, p_I^*(x) + c_I\, q_I(x) + c_I^\dagger\, q_I^*(x) \right] \tag{D.11}$$

と展開し，out-真空 $|0;\mathrm{out}\rangle$ を次で定義する：

$$b_I\,|0;\mathrm{out}\rangle = 0\,, \quad c_I\,|0;\mathrm{out}\rangle = 0 \quad \left[\forall I = (\omega, \ell, m)\right]. \tag{D.12}$$

正エネルギー解の 2 つの完全系 $\{p_I(x)\} \cup \{q_I(x)\}$ と $\{f_I(x)\}$ とは Bogoliubov 変換で結ばれる：

$$p_I(x) = \sum_J \bigl(\alpha_{IJ}\, f_J(x) + \beta_{IJ}\, f_J^*(x)\bigr)\,, \tag{D.13}$$

$$q_I(x) = \sum_J \bigl(\gamma_{IJ}\, f_J(x) + \eta_{IJ}\, f_J^*(x)\bigr)\,, \tag{D.14}$$

$$\begin{pmatrix} b_I \\ b_I^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{IJ}^* & -\beta_{IJ}^* \\ -\beta_{IJ} & \alpha_{IJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_J \\ a_J^\dagger \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_I \\ c_I^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{IJ}^* & -\eta_{IJ}^* \\ -\eta_{IJ} & \gamma_{IJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_J \\ a_J^\dagger \end{pmatrix}. \tag{D.15}$$

このとき，$\mathcal{I}^+$ に向かう粒子数の期待値は次で与えられる：

$$\langle 0;\mathrm{in}|b_I^\dagger\, b_I|0;\mathrm{in}\rangle = \sum_{J,K} \beta_{IK}\, \beta_{IJ}^*\, \langle 0;\mathrm{in}|a_K a_J^\dagger|0;\mathrm{in}\rangle = \sum_J |\beta_{IJ}|^2\,. \tag{D.16}$$

以下で見るように，重力崩壊過程では一般に $\beta_{IJ} \neq 0$ となり，$\mathcal{I}^+$ の観測者は 0 でない粒子数を観測することになる．とくにホライズン近傍に十分長い時間とどまった後で出てくるフラックスは，Hawking 温度 $T_{\mathrm{H}} = \kappa/2\pi$（$\kappa = 1/4GM$：表面重力）の Planck 分布になる．これが **Hawking 輻射**である．

Bogoliubov 係数と粒子生成率

$\mathcal{I}^+$ と $\mathcal{I}^-$ の正エネルギー解の完全系 $\{p_I(x)\}, \{f_I(x)\}$ を

$$p_I(x) = \frac{P_{\omega\ell}(t,r)}{\sqrt{4\pi\omega}\, r} Y_{\ell m}(\Omega)\,, \quad f_I(x) = \frac{F_{\omega\ell}(t,r)}{\sqrt{4\pi\omega}\, r} Y_{\ell m}(\Omega) \tag{D.17}$$

と書き，星の外部では $P_{\omega\ell}(t,r) \equiv p_{\omega\ell}(r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}$, $F_{\omega\ell}(t,r) \equiv f_{\omega\ell}(r)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega v}$ と置く．$\mathcal{I}^-$ 近傍で $f_{\omega\ell}(t,r) \sim 1$ となることから，Bogoliubov 係数は，公式 (3.23) の KG 内積を $\Sigma = \mathcal{I}^-$ で評価することで，

$$\alpha_{II'} = \alpha_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)}\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'}\,, \quad \beta_{II'} = \beta_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)}\, \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'}\,, \tag{D.18}$$

$$\alpha_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v}\,P_{\omega\ell}(t,r)\Big|_{\mathcal{I}^-}\,, \tag{D.19}$$

$$\beta_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}v\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' v}\,P_{\omega\ell}(t,r)\Big|_{\mathcal{I}^-} \tag{D.20}$$

と書ける．このように，Bogoliubov 係数を求めるには，$\mathcal{I}^-$ 近傍での $p_I(x)$ の漸近形が分かればよい．これは，$\mathcal{I}^+$ における漸近形 (D.10) を初期値として逆向きの時間発展を追うことで原理的には求まるが，もちろんこの作業は，崩壊する星の時間変化を具体的に与えない限り遂行できない．しかしながら，今興味があるのは十分未来の観測者（i^+ の近傍）が受けるブラックホールからのフラックスであり，そこに到達する波はホライズン近傍に長い時間とどまっているため，大きな青方偏移を受ける．従って，Bogoliubov 係数の $\omega' \gg \omega$ の漸近形だけ分かればよく，これは，重力崩壊の詳細に依らず，幾何光学近似を用いて決定できる．以下このことを，いくつかのステップに分けて示す*1)．なお，波動関数 $p_I(x)$ は，$\mathcal{I}^+$ から過去方向へ遡るとき，2 種類の部分に分けられる：$p_I(x) = p_I^{(1)}(x) + p_I^{(2)}(x)$．1 つ目は，崩壊する星の外部にあるポテンシャル $V_\ell(r)$ で反射され，振動数 ω が一定のまま $\mathcal{I}^-$ に達する部分を表す．2 つ目は，ポテンシャルを越えて崩壊する物体に入り，原点 $r=0$ を通った後 $\mathcal{I}^-$ に達する部分を表す．2 つ目の $p_I^{(2)}(x)$ のみが Hawking 効果を引き起こす*2)．

［ステップ 1］ 最初に，星の外側では，動径方向のヌル測地線が「u 一定（外向き）」または「v 一定（内向き）」となることを示す．まず，λ をアフィンパラメーターとするヌル測地線 $X^\mu(\lambda)$ について，その接ベクトル $k^\mu = \dot{X}^\mu$ と Killing ベクトル ξ^μ との内積が測地線に沿って一定であることに注意する*3)．今，Killing ベクトル場 $\mathsf{t} = \partial_t$ と $\mathsf{m} = \partial_\varphi$ についての保存量を $-E$ と J と置けば，次が成立する（注：動径方向の軌跡なので $J=0$）：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}E\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\lambda} = r^{-2}\,\sin^{-2}\theta\,J = 0\,. \tag{D.21}$$

これと $g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu = 0$ を用いると

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\lambda} = \pm E \quad (+：外向き，-：内向き) \tag{D.22}$$

となる．(D.21) と (D.22) を組み合わせれば，次が得られる：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(t \mp r^*) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} = 0 \text{ または } \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda} = 0\right]. \tag{D.23}$$

---

*1) 以下の議論では，一部 [87] を参考にした．

*2) 実際に，$\{p_I^{(1)}(x)\}$ と $\{f_I(x)\}$ の間の Bogoliubov 係数は $\alpha^{(1)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} = (\text{定数}) \times \delta(\omega-\omega')$, $\beta^{(1)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} = 0$ のように自明な形になり，粒子生成に寄与しない．

*3) 実際，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda)\,(k^\mu\xi_\mu) = k^\nu\nabla_\nu\,(k^\mu\xi_\mu) = (k^\nu\nabla_\nu k^\mu)\,\xi_\mu + k^\nu k^\mu\nabla_\mu\xi_\nu = 0$．

［ステップ 2］ 図 D.1 の軌跡 β のように，$\mathcal{I}^-$ を出発した v 一定のヌル測地線を考える ($\mathrm{d}r/\mathrm{d}\lambda = -E$)．$\mathcal{H}^+$ 上で $\lambda = 0$ と原点を選べば，簡単な計算により，この測地線上では $\mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda = 2E - 4GM/\lambda$ となることが分かり，内向きのヌル測地線は次で与えられる（$\mathcal{H}^+$ の外側では $\lambda < 0$ であることに注意）：

$$u = 2E\lambda - 4GM\ \ln[(-\lambda)/C]\,. \tag{D.24}$$

ここで C は正の積分定数である．従って，u は $\mathcal{H}^+$ の近傍で次の形になる：

$$u \sim -4GM\ \ln[(-\lambda)/C]\,. \tag{D.25}$$

以下，$\mathcal{H}^+$ に平行なヌル測地線 γ に対し（図 D.1），$\mathcal{H}^+$ からのアフィン距離をこの λ で表すことにする．

［ステップ 3］ (D.25) より，$p_I(x)$ の位相部分は $\mathcal{H}^+$ 近傍で $\exp\left[4\mathrm{i}\omega GM \ln(-\lambda)/C\right]$ となり，アフィンパラメーター λ ($\lambda \sim 0$) の変化に対し大きく振動する．その結果，$p_I(x)$ に対し幾何光学近似が使えるようになる*4)．このとき，ホライズン近傍の一定位相の局所的波面の軌跡は $\mathcal{I}^+$ からヌル測地線に沿って過去に遡ったもので与えられる．これを γ と呼ぶことにすれば（図 D.1），これは，$\mathcal{H}^+$ に平行に進んで $r = 0$ に達した後，$\mathcal{I}^+$ に平行な直線となり，$\mathcal{I}^-$ に到達する．この到達点のアフィンパラメーターの値を v とする．

上のような $\mathcal{I}^-$ 上の到達点 v には上限があり，これを v_0 と書く（図 D.1）*5)．このとき，十分小さい $|\lambda|$ に対して，$\mathcal{I}^-$ 上の 2 点 v_0 と v の間のアフィン距離は λ に比例する：$v - v_0 = D\,\lambda$（D は正の定数)．従って，$\mathcal{I}^-$ における $p_I(x)$ の位相部分は v を用いて次のように書ける：

$$\exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\ln\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right)\right] \quad (\kappa = 1/4GM)\,. \tag{D.26}$$

こうして，$p_I^{(2)}(x) \equiv (\sqrt{4\pi\,\omega}\,r)^{-1}\,P^{(2)}_{\omega\ell}(t,r)\,Y_{\ell m}(\Omega)$ の $\mathcal{I}^-$ 近傍での漸近形が次の形に決まる：

$$P^{(2)}_{\omega\ell}(t,r) \propto \begin{cases} 0 & (v > v_0), \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\ln\left(\frac{v_0 - v}{CD}\right)} & (v < v_0)\,. \end{cases} \tag{D.27}$$

［ステップ 4（最終ステップ）］(D.27) を (D.19) と (D.20) に代入すれば，$\omega' \gg \omega$ に対する次の漸近形が得られる：

$$\alpha^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} \propto \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0} \mathrm{d}v\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v + \mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\ \ln\left(-\frac{v - v_0}{CD}\right)}\,, \tag{D.28}$$

---

*4) Klein–Gordon 方程式の解 $p(x)$ を $p(x) = A(x)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(x)}$ と書いたとき，「位相 $S(x)$ の一定面の法ベクトル場 $k_\mu(x) = \partial_\mu S(x)$ の積分曲線」を粒子の軌跡とみなすのが幾何光学近似である．これは位相 $S(x)$ の変化率が大きいほど良い近似になっている．今考えているゼロ質量の場に対しては，粒子の軌跡はヌル測地線となる．実際，法線ベクトル $k_\mu = \partial_\mu S$ は，近似の 0 次で，ヌル測地線の接ベクトルになっている：$k^\mu k_\mu = 0$, $k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0$.

*5) 実際，$v > v_0$ から出発するヌル測地線は $\mathcal{H}^+$ の内部に入ってしまう．

$$\beta^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} \propto \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0} \mathrm{d}v\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega')v+\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\ \ln(-\frac{v-v_0}{CD})}\ . \tag{D.29}$$

κ, ω, C, $D > 0$ より，ω' に無限小の虚部を与えると，$\alpha^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)}$ の積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{v_0} \mathrm{d}v\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v+\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}\ln(-\frac{v-v_0}{CD})} \\
&= (CD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v_0}\int_0^{\infty}\mathrm{d}x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' x}\,x^{\mathrm{i}\frac{\omega}{\kappa}} \quad \left[x\equiv -(v-v_0)\right] \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{\omega'}\,(CD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v_0}\,(\mathrm{i}\omega')^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\,\Gamma\Big(1+\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}\Big)
\end{aligned} \tag{D.30}$$

と収束する．一方，係数 $\beta^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)}$ については

$$(-\mathrm{i}\omega')^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\,(\mathrm{i}\omega')^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}} \tag{D.31}$$

を用いて書き換えればよく，Bogoliubov 係数の漸近形が

$$\alpha^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} \propto -\frac{\mathrm{i}}{2\pi\sqrt{\omega\,\omega'}}\,(CD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega' v_0}\,(\mathrm{i}\omega')^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\,\Gamma\Big(1+\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}\Big)\,, \tag{D.32}$$

$$\beta^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)} \propto \frac{\mathrm{i}\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}}}{2\pi\sqrt{\omega\,\omega'}}\,(CD)^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega' v_0}\,(\mathrm{i}\omega')^{-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}}\,\Gamma\Big(1-\frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa}\Big) \tag{D.33}$$

と求まる．これは，関係式

$$|\alpha^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)}| = \mathrm{e}^{\frac{\pi\omega}{\kappa}}\,|\beta^{(2)}_{(\omega\ell m)(\omega'\ell m)}| \quad (\omega'\gg\omega) \tag{D.34}$$

を満たしている．(D.34) を (3.21) の第 1 式に代入すれば，$\mathcal{I}^+$ に向かう粒子数の期待値 (D.16) が

$$\sum_J |\beta^{(2)}_{IJ}|^2 = \frac{\Gamma_I}{\mathrm{e}^{2\pi\omega/\kappa}-1} \quad \left[I=(\omega,\ell,m)\right] \tag{D.35}$$

と求まり，Hawking 温度 $T_{\mathrm{H}} = \kappa/2\pi$ の Planck 分布になっていることが分かる．ここで，

$$\Gamma_I \equiv \sum_J \big(|\alpha^{(2)}_{IJ}|^2 - |\beta^{(2)}_{IJ}|^2\big) \tag{D.36}$$

は形式的には発散しているが，ω まわりの波束を作り，単位時間当たりの量に換算すれば有限になる [28], [87]．その値はブラックホールの吸収率を表し、**灰体因子** (gray body factor) と呼ばれる．

付録 E
マスター方程式 (3.74) の導出

本付録では，論文 [29] に基づいて，マスター方程式 (3.74) の導出を与える．

出発点は，(3.73) 式で与えた von Neumann 方程式である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = -\,\mathrm{i}\,[V_I(t), \rho_I^{\mathrm{tot}}(t)] \equiv -\mathrm{i}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)}\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)\,. \tag{E.1}$$

これは，射影演算子の方法（例えば [30]）を用いると，以下のようにして，$\rho_I(t) \equiv \mathrm{tr}_\phi\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)$ だけを含む式に書き直すことができる．

まず，$\mathrm{End}\,\mathcal{H}^{\mathrm{tot}}$ *1) に作用する線形演算子 $\mathcal{P}$ を導入する:

$$\mathcal{P}:\ \mathrm{End}\,\mathcal{H}^{\mathrm{tot}}\ \ni\ O\ \mapsto\ \mathcal{P}O \equiv (\mathrm{tr}_\phi\,O)\otimes X^\phi \in\ \mathrm{End}\,\mathcal{H}^{\mathrm{tot}}\,. \tag{E.2}$$

ここで，$\mathcal{H}^\phi$ に作用する演算子 $X^\phi \in \mathrm{End}\,\mathcal{H}^\phi$ は，

$$\mathrm{tr}_\phi\,X^\phi = 1 \tag{E.3}$$

を満たし，かつ時間によらない限り，何でもよい．(E.3) 式より，$\mathcal{P}$ が射影演算子になっていることが容易に分かる：$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$．とくに $O = \rho_I^{\mathrm{tot}}(t)$ とおけば，

$$\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = (\mathrm{tr}_\phi\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t))\otimes X^\phi = \rho_I(t)\otimes X^\phi \tag{E.4}$$

を得る．この $\mathcal{P}$ に対する直交射影は $\mathcal{Q} \equiv 1 - \mathcal{P}$ で与えられ，実際，$\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$，$\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0 = \mathcal{Q}\mathcal{P}$ を満たすことが容易に確かめられる．

さて，$\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)$ は時間発展の方程式 (3.73) を満たすので，$\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)$ と $\mathcal{Q}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)$ は次の微分方程式を満たす（$\mathcal{P}+\mathcal{Q} = 1$ に注意せよ）：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = -\mathrm{i}\mathcal{P}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)}\,\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) - \mathrm{i}\mathcal{P}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)}\,\mathcal{Q}\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)\,, \tag{E.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{Q}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = -\mathrm{i}\mathcal{Q}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)}\,\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) - \mathrm{i}\mathcal{Q}\,\mathrm{ad}_{V_I(t)}\,\mathcal{Q}\,\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)\,. \tag{E.6}$$

第 2 式 (E.6) の解は

---

*1) $\mathrm{End}\,V$ は線形空間 V に作用する線形作用素の全体．

$$\mathcal{Q}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = -\mathrm{i}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t'}^{t} \mathrm{d}t'' \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t'')}}\, \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t')}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t') + \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t' \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t')}}\, \mathcal{Q}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t_1)\,, \tag{E.7}$$

で与えられるが，これを第 1 式 (E.5) に代入し，さらに関係式 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = (\mathrm{d}\rho_I(t)/\mathrm{d}t) \otimes X^{\phi}$ を用いれば，次が得られる：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho_I(t)}{\mathrm{d}t} \otimes X^{\phi} \\
&= -\mathrm{i}\mathcal{P}\, \mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) - \mathrm{i}\mathcal{P}\, \mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t' \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t')}}\, \mathcal{Q}\, \rho_I^{\mathrm{tot}}(t_1) \\
&\quad - \mathcal{P}\, \mathrm{ad}_{V_I(t)} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t'}^{t} \mathrm{d}t'' \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t'')}}\, \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t')}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t')\,.
\end{aligned} \tag{E.8}$$

ここで，X^{ϕ} が（$\rho_I(t)$ の時間発展を変えずに）任意にとれることを用いて，

$$X^{\phi} \equiv \rho_I^{\phi}(t_1)\,, \tag{E.9}$$

と選ぶことにする．実際これは条件 (E.3) を満たしている．すると，初期条件 (3.62) より

$$\mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t_1) = \rho_I^{\mathrm{tot}}(t_1)\,, \quad \mathcal{Q}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t_1) = 0\,, \tag{E.10}$$

となり，従って，(E.8) 式の右辺第 2 項は消える．さらに，(3.69) の相互作用項の形を用いると，

$$\mathrm{tr}_{\phi}\big(\mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)\big) = \lambda \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} \big[\mu_I(\tau),\, \rho_I(t)\big]\, \mathrm{tr}_{\phi}\big(\phi_I\big(x(\tau)\big)\rho_I^{\phi}(t_1)\big) \tag{E.11}$$

となり，これは，（以後仮定するように）スカラー場の 1 点関数が

$$\mathrm{tr}_{\phi}\big(\phi_I\big(x(\tau)\big)\rho_I^{\phi}(t_1)\big) = 0 \tag{E.12}$$

と消えていれば，0 になる．こうして，(E.8) 式の第 1 項も 0 になることが分かる：

$$\mathcal{P}\, \mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = \mathrm{tr}_{\phi}\big(\mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t)\big) \otimes X^{\phi} = 0\,. \tag{E.13}$$

さらに，最後の式 (E.13) は $\mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = \mathrm{ad}_{V_I(t)}\, \mathcal{P}\rho_I^{\mathrm{tot}}(t) = \mathrm{ad}_{V_I(t)} \big(\rho_I(t) \otimes \rho_I^{\phi}(t_1)\big)$ を意味するので，結局 (E.8) 式は次の形に書きなおされる：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\rho_I(t)}{\mathrm{d}t} \otimes \rho_I^{\phi}(t_1) \\
&= -\mathcal{P}\, \mathrm{ad}_{V_I(t)} \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, \mathrm{T}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\int_{t'}^{t} \mathrm{d}t'' \mathcal{Q}\, \mathrm{ad}_{V_I(t'')}}\, \mathrm{ad}_{V_I(t')}\, \big(\rho_I(t') \otimes \rho_I^{\phi}(t_1)\big)\,.
\end{aligned} \tag{E.14}$$

これが示したかったマスター方程式 (3.74) であり，この方程式は，初期条件 (3.62) と仮定 (E.12) のもとで，密度行列 $\rho_I(t)$ の時間発展を一意に決定する．

付録 F
Cardyの公式

N_B 個の自由実スカラーと N_F 個の自由 Majorana フェルミオンからなる $(1+1)$ 次元共形場理論について，右向きモードの状態密度 d_N の $N \gg 1$ における漸近形は，次の **Cardy の公式**で与えられる [88]：

$$S(N) \equiv \ln d_N \simeq 2\pi\sqrt{\frac{Nc}{6}} \quad \left(c = N_B + \frac{1}{2}\,N_F\right). \tag{F.1}$$

実は，この公式は一般の c の共形場理論について成立し，モジュラー変換を用いて証明できる．しかし，第 6 章で扱っているような自由場の場合には，以下で示すように，(あまり厳密ではないが) 初等的に証明することができる．

まず，$q \equiv \mathrm{e}^{-\beta}$ として，次の分配関数を導入する：

$$Z(\beta) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} d_N\, q^N = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+q^m)^{N_F}}{(1-q^m)^{N_B}} \equiv Z_B(\beta)\, Z_F(\beta)\,. \tag{F.2}$$

ボソン部分 $Z_B(\beta)$ は次のように変形できる：

$$\begin{aligned}\ln Z_B(\beta) &= -N_B \sum_{m\geq 1} \ln(1-q^m) = N_B \sum_{m\geq 1}\sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\ell}\, q^{m\ell} \\ &= N_B \sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\ell}\frac{q^\ell}{1-q^\ell}\,.\end{aligned} \tag{F.3}$$

今知りたいのは，$N \gg 1$ つまり $q = \mathrm{e}^{-\beta} \sim 1$ の領域であるので，$\beta = 0$ のまわりで展開してみる．すると，

$$\frac{q^\ell}{1-q^\ell} = \frac{1}{\ell\beta} - 1 + \mathcal{O}(\beta) \tag{F.4}$$

より，

$$\ln Z_B(\beta) = \frac{N_B}{\beta} \sum_{\ell\geq 1} \frac{1}{\ell^2} + \mathcal{O}(\beta^0) \tag{F.5}$$

となる．ここで，ζ 関数 $\zeta(s) = \sum_{\ell\geq 1} \ell^{-s}$ に関する公式 $\sum_{\ell\geq 1} \ell^{-2} = \zeta(2) =$

$\pi^2/6$ を用いれば，次を得る：

$$\ln Z_B(\beta) = \frac{\pi^2 N_B}{6\beta} + \mathcal{O}(\beta^0)\,. \tag{F.6}$$

フェルミオン部分も同様に計算され，

$$\begin{aligned}\ln Z_F(\beta) &= N_F \sum_{m\geq 1} \ln(1+q^m) = N_F \sum_{m\geq 1}\sum_{\ell\geq 1} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell}\, q^{m\ell} \\ &= N_F \sum_{\ell\geq 1} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell}\frac{q^\ell}{1-q^\ell} = \frac{N_F}{\beta}\sum_{\ell\geq 1}\frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell^2} + \mathcal{O}(\beta^0)\end{aligned} \tag{F.7}$$

となる．ここで，公式 $\sum_{\ell\geq 1}(-1)^{\ell-1}\,\ell^{-2} = \pi^2/12$ を用いると，次が得られる：

$$\ln Z_F(\beta) = \frac{\pi^2 N_B}{6\beta} + \mathcal{O}(\beta^0)\,. \tag{F.8}$$

以上まとめて，分配関数 $Z(\beta)$ の $\beta\sim 0$ における振る舞いが，

$$\begin{aligned}\ln Z(\beta) &= \ln Z_B(\beta) + \ln Z_F(\beta) = \frac{\pi^2}{6\beta}\left(N_B + \frac{1}{2}\,N_F\right) + \mathcal{O}(\beta^0) \\ &= \frac{\pi^2 c}{6\beta} + \mathcal{O}(\beta^0) \quad \left(c = N_B + \frac{1}{2}\,N_F\right)\end{aligned} \tag{F.9}$$

であることが分かった．

一度分配関数が求まれば，$N\gg 1$ における状態数 d_N は，統計力学で正準集合からエントロピーを計算するのと同じ手法を用いて，次のように求まる：まず，固定された $\beta\,(\sim 0)$ に対し，$Z(\beta)$ の和に現れる $d_N\,\mathrm{e}^{-\beta N}$ は，d_N が N の増加関数であることと $\mathrm{e}^{-\beta N}$ が減少関数であることから，ある $N=\bar{N}(\beta)\,(\gg 1)$ のところに鋭いピークを持ち，

$$Z(\beta) \simeq d_{\bar{N}(\beta)}\,\mathrm{e}^{-\beta\,\bar{N}(\beta)} \tag{F.10}$$

と近似できる．また，この $\bar{N}(\beta)$ は N の期待値と一致する：

$$\bar{N}(\beta) \simeq -\frac{\partial}{\partial\beta}\,\ln Z(\beta) = \frac{\pi^2 c}{6\beta^2} + \mathcal{O}(\beta^0)\,. \tag{F.11}$$

この式を逆に解けば，

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi^2 c}{6\bar{N}}}\,\left[1+\mathcal{O}(\bar{N}^{-1})\right] \tag{F.12}$$

である．式 (F.10) より，状態数の対数は，

$$S \equiv \ln d_{\bar{N}(\beta)} = \ln Z(\beta) + \beta\,\bar{N}(\beta) = \frac{\pi^2 c}{6\beta} + \beta\,\bar{N}(\beta) + \mathcal{O}(\beta^0) \tag{F.13}$$

となるが，式 (F.12) を用いてこれを $\bar{N}$ で表せば，

$$S(\bar{N}) = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{N}c}{6}}\,\left[1+\mathcal{O}(\bar{N}^{-1})\right] \tag{F.14}$$

となる． □

参考文献

[1] R. M. Wald, "General Relativity", Chicago University Press (1984).

[2] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, "Gravitation", San Francisco (1973).

[3] E. Poisson, "A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics", Cambridge University Press (2007).

[4] 窪田高弘，佐々木隆,『相対性理論』（裳華房テキストシリーズ—物理学），裳華房 (2001).

[5] 白水徹也,『アインシュタイン方程式 ～ 一般相対性理論のよりよい理解のために ～』（SGC ライブラリ 90），サイエンス社 (2012).

[6] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, "The large scale structure of space-time", Cambridge University Press (1973).

[7] P. K. Townsend, "Black Holes: Lecture notes", (1997) [gr-qc/9707012].

[8] V. P. Frolov and I. D. Novikov, "Black hole physics: Basic concepts and new developments", Springer (1998).

[9] R. L. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, "Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity", *Phys. Rev.* **116** (1959) 1322.

[10] I. Racz and R. M. Wald, "Extension of space-times with Killing horizon", *Class. Quant. Grav.* **9**, 2643 (1992).

[11] R. Penrose, "Structure of space-time", in Lectures in Mathematics and Physics, ed. C.M. DeWitt and J.A. Wheeler, pp. 121–235, Benjamin, New York (1968).

[12] S. W. Hawking, "Black holes in general relativity", *Commun. Math. Phys.* **25**, 152 (1972).

[13] ランダウ，リフシッツ,『統計物理学』，岩波書店 (1980).

[14] M. Fukuma and Y. Sakatani, "Entropic formulation of relativistic continuum mechanics", *Phys. Rev. E* **84**, 026315 (2011) [arXiv:1102.1557 [hep-th]].

[15] ランダウ，リフシッツ,『流体力学 (2)』，東京図書 (1971).

[16] C. Eckart, "The Thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of the simple fluid", *Phys. Rev.* **58**, 919 (1940).

[17] L. Onsager, "Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I", *Phys. Rev.* **37**, 405 (1931).

[18] L. Onsager, "Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II", *Phys. Rev.* **38**, 2265 (1931).

[19] H. B. G. Casimir, "On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility", *Rev. Mod. Phys.* **17**, 343 (1945).

[20] S. R. de Groot and P. Mazur, "Non-Equilibrium Thermodynamics", Dover (1984).

[21] R. C. Tolman, "On the Weight of Heat and Thermal Equilibrium in General Relativity", *Phys. Rev.* **35**, 904 (1930).

[22] M. Fukuma and Y. Sakatani, "Relativistic viscoelastic fluid mechanics", *Phys. Rev. E* **84**, 026316 (2011) [arXiv:1104.1416 [cond-mat.stat-mech]].

[23] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge University Press (1982).

[24] R. M. Wald, "Quantum field theory in curved space-time and black hole thermodynamics", Chicago University Press (1994).

[25] M. Fukuma, S. Sugishita and Y. Sakatani, "Propagators in de Sitter space", *Phys. Rev. D* **88**, 024041 (2013) [arXiv:1301.7352 [hep-th]].

[26] W. G. Unruh, "Notes on black hole evaporation", *Phys. Rev. D* **14**, 870 (1976).

[27] W. G. Unruh and N. Weiss, "Acceleration Radiation in Interacting Field Theories", *Phys. Rev. D* **29**, 1656 (1984).

[28] S. W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes", *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975) [*Erratum-ibid.* **46**, 206 (1976)].

[29] M. Fukuma, Y. Sakatani and S. Sugishita, "Master equation for the Unruh-DeWitt detector and the universal relaxation time in de Sitter space", *Phys. Rev. D* **89**, 064024 (2014) [arXiv:1305.0256 [hep-th]].

[30] 戸田盛和，斎藤信彦，久保亮五，橋爪夏樹,『統計物理学』，岩波書店 (2011).

[31] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, "Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity", *Phys. Rev. D* **15**, 2752 (1977).

[32] J. W. York, Jr., "Role of conformal three geometry in the dynamics of gravitation", *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1082 (1972).

[33] B. S. DeWitt, "Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory", *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).

[34] T. Thiemann, "Modern canonical quantum general relativity", Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (2007).

[35] I. S. Booth and R. B. Mann, "Moving observers, nonorthogonal boundaries, and quasilocal energy", *Phys. Rev. D* **59**, 064021 (1999) [gr-qc/9810009].

[36] 九後汰一郎,『ゲージ場の量子論 (1)』，培風館 (1989).

[37] J. D. Brown and J. W. York, Jr., "Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action", *Phys. Rev. D* **47**, 1407 (1993) [gr-qc/9209012].

[38] S. W. Hawking and G. T. Horowitz, "The Gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms", *Class. Quant. Grav.* **13**, 1487 (1996) [gr-qc/9501014].

[39] L. F. Abbott and S. Deser, "Stability of Gravity with a Cosmological Constant", *Nucl. Phys. B* **195**, 76 (1982).

[40] T. Regge and C. Teitelboim, "Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity", *Annals Phys.* **88**, 286 (1974).

[41] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, "The Black hole in three-dimensional spacetime", *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992) [hep-th/9204099].

[42] J. D. Brown and M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity", *Commun. Math. Phys.* **104**, 207 (1986).

[43] M. Henneaux and C. Teitelboim, "Asymptotically anti-De Sitter Spaces", *Commun. Math. Phys.* **98**, 391 (1985).

[44] J. W. York, Jr., "Black hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action", *Phys. Rev. D* **33**, 2092 (1986).

[45] H. W. Braden, J. D. Brown, B. F. Whiting and J. W. York, Jr., "Charged black hole in a grand canonical ensemble", *Phys. Rev. D* **42**, 3376 (1990).

[46] J. D. Brown and J. W. York, Jr., "The Microcanonical functional integral. 1. The Gravitational field", *Phys. Rev. D* **47**, 1420 (1993) [gr-qc/9209014].

[47] M. Rangamani, "Gravity and Hydrodynamics : Lectures on the fluid-gravity correspondence", *Class. Quant. Grav.* **26**, 224003 (2009) [arXiv:0905.4352 [hep-th]].

[48] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, "The Four laws of black hole mechanics", *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).

[49] S. W. Hawking and J. B. Hartle, "Energy and angular momentum flow into a black hole", *Commun. Math. Phys.* **27**, 283 (1972).

[50] V. Iyer and R. M. Wald, "A Comparison of Noether charge and Euclidean methods for computing the entropy of stationary black holes", *Phys. Rev. D* **52**, 4430 (1995) [gr-qc/9503052].

[51] A. Komar, "Covariant conservation laws in general relativity", *Phys. Rev.* **113**, 934 (1959).

[52] T. Jacobson, G. Kang and R. C. Myers, "On black hole entropy", *Phys. Rev. D* **49**, 6587 (1994) [gr-qc/9312023].

[53] V. Iyer and R. M. Wald, "Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy", *Phys. Rev. D* **50**, 846 (1994) [gr-qc/9403028].

[54] T. Jacobson, "Thermodynamics of space-time: The Einstein equation of state", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1260 (1995) [gr-qc/9504004].

[55] C. Eling, R. Guedens and T. Jacobson, "Non-equilibrium thermodynamics of spacetime", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 121301 (2006) [gr-qc/0602001].

[56] E. P. Verlinde, "On the Origin of Gravity and the Laws of Newton", *JHEP* **1104**, 029 (2011) [arXiv:1001.0785 [hep-th]].

[57] 福間将文, "重力と熱力学 〜熱力学から一般相対論は導出できるか〜", 数理科学 2011 年 10 月号, サイエンス社.

[58] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 1 & 2", Cambridge University Press (1987).

[59] J. Polchinski, "String Theory. Vol. 1 & 2", Cambridge University Press (1998).

[60] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, "String theory and M-theory: A Modern Intro-

duction", Cambridge University Press (2007).

[61] 太田信義,『超弦理論・ブレイン・M 理論』(現代理論物理学シリーズ 1), 丸善出版 (2012).

[62] A. M. Polyakov, "Gauge Fields And Strings", CRC Press (1987).

[63] L. Brink, P. Di Vecchia and P. S. Howe, "A Locally Supersymmetric and Reparametrization Invariant Action for the Spinning String", *Phys. Lett. B* **65**, 471 (1976).

[64] S. Deser and B. Zumino, "A Complete Action for the Spinning String", *Phys. Lett. B* **65**, 369 (1976).

[65] M. Kato and K. Ogawa, "Covariant Quantization of String Based on BRS Invariance", *Nucl. Phys. B* **212** (1983) 443.

[66] D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, "Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory", *Nucl. Phys. B* **271**, 93 (1986).

[67] M. Fukuma, T. Oota and H. Tanaka, "Comments on T dualities of Ramond-Ramond potentials", *Prog. Theor. Phys.* **103**, 425 (2000) [hep-th/9907132].

[68] O. Hohm, S. K. Kwak and B. Zwiebach, "Double Field Theory of Type II Strings", *JHEP* **1109**, 013 (2011) [arXiv:1107.0008 [hep-th]].

[69] A. Strominger and C. Vafa, "Microscopic origin of the Bekenstein-Hawking entropy", *Phys. Lett. B* **379**, 99 (1996) [hep-th/9601029].

[70] C. G. Callan and J. M. Maldacena, "D-brane approach to black hole quantum mechanics", *Nucl. Phys. B* **472**, 591 (1996) [hep-th/9602043].

[71] J. M. Maldacena and L. Susskind, "D-branes and fat black holes", *Nucl. Phys. B* **475**, 679 (1996) [hep-th/9604042].

[72] A. Strominger, "Black hole entropy from near horizon microstates", *JHEP* **9802** (1998) 009 [hep-th/9712251].

[73] G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity", Salamfest 1993:0284-296 [gr-qc/9310026].

[74] L. Susskind, "The World as a hologram", *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995) [hep-th/9409089].

[75] J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].

[76] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, "Large N field theories, string theory and gravity", *Phys. Rept.* **323**, 183 (2000) [hep-th/9905111].

[77] 福間将文, "AdS/CFT 対応とホログラフィー", 別冊・数理科学 2009 年 10 月号, サイエンス社.

[78] S. S. Gubser, I. R. Klebanov and A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from non-critical string theory", *Phys. Lett. B* **428**, 105 (1998) [hep-th/9802109].

[79] E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography", *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998) [hep-th/9802150].

[80] L. Susskind and E. Witten, "The holographic bound in anti-de Sitter space", (1998)

[hep-th/9805114].

[81] M. Fukuma, S. Matsuura and T. Sakai, “Holographic renormalization group”, *Prog. Theor. Phys.* **109**, 489 [invited paper] (2003) [hep-th/0212314].

[82] 高柳匡,『ホログラフィー原理と量子エンタングルメント』(SGC ライブラリ 106), サイエンス社 (2014).

[83] M. Nielsen and I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information”, Cambridge University Press (2010).

[84] P. Calabrese and J. L. Cardy, “Entanglement entropy and quantum field theory”, *J. Stat. Mech.* **0406** (2004) P06002 [hep-th/0405152].

[85] S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT”, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 181602 [hep-th/0603001].

[86] 松島与三,『多様体入門』(数学選書 5), 裳華房 (1965).

[87] L. E. Parker and D. J. Toms, “Quantum Field Theory in Curved Spacetime”, Cambridge University Press (2009).

[88] J. L. Cardy, “Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories”, *Nucl. Phys. B* **270**, 186 (1986).

索　引

欧字

ア

カ

サ

著者略歴

福間 将文
ふくま まさふみ

1987 年　東京大学理学部物理学科卒業
1992 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了，理学博士
1992 年　日本学術振興会特別研究員
1992 年　Cornell 大学 Newman 研究所 Postdoctoral Associate
1993 年　京都大学基礎物理学研究所助手
2002 年　京都大学大学院理学研究科助教授
2007 年　京都大学大学院理学研究科准教授
専　門　素粒子論，とくに場の量子論・弦理論

酒谷 雄峰
さかたに ゆうほう

2007 年　東北大学理学部物理学科卒業
2009 年　日本学術振興会特別研究員
2012 年　京都大学大学院理学研究科博士課程修了，理学博士
2012 年　京都産業大学益川塾 博士研究員
2014 年　ソウル国立大学 Senior Research Fellow
専　門　素粒子論，一般相対論

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-112

『重力とエントロピー　重力の熱力学的性質を理解するために』

著　者　福間 将文・酒谷 雄峰

2014 年 10 月 25 日　　初版発行

数理科学編集部　　　　発行人　木　下　敏　孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.　　　表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社　**サ イ エ ン ス 社**　　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤 眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博